

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВСЕ ГРАНИ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Сборник статей
Всероссийской молодежной
научной конференции

Томск, 23–27 мая 2022 г.

ТОМСК
2022

ББК 53.434
УДК 616.2
К61

Все грани математики и механики: сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции (Томск, 23–27 мая 2022 г.) / под ред. Л.В. Гензе. – Томск: ООО «Издательство «Красное знамя», 2022. – 188 с.

ISBN — 978-5-6047451-5-1

Аннотация: в сборнике представлены статьи участников Всероссийской молодежной научной конференции «Все грани математики и механики», посвященные актуальным проблемам математики и механики, а также современным подходам и методам решения фундаментальных и прикладных задач. Для студентов, аспирантов, молодых ученых.

Организаторы: Национальный исследовательский Томский государственный университет; механико-математический факультет НИ ТГУ; региональный научно-образовательный математический центр (НОМЦ) НИ ТГУ.

Редакционная коллегия: Гензе Л.В., к. ф.- м. н., декан ММФ, директор НОМЦ НИ ТГУ; Касымов Д.П., к. ф.- м. н., доцент ММФ НИ ТГУ.

Организационный комитет конференции: к. ф.- м. н, зам. декана ММФ НИ ТГУ (председатель) Касымов Д.П.; к.ф.-м.н., вед. инженер ММФ НИ ТГУ (заместитель председателя) Барт А.А.; студент ММФ НИ ТГУ (ответственный секретарь) Орлов К.Е.; студент ММФ НИ ТГУ Бер К.А.; студент ММФ НИ ТГУ Голубничий Е.Н.; студент ММФ НИ ТГУ Медведева Т.И.; студент ММФ НИ ТГУ Норкобилов А.А.; студент ММФ НИ ТГУ Сомова П.А.; студент ММФ НИ ТГУ Тохметова М.Б.; студент ММФ НИ ТГУ Хильчук М.Д.; ст. преподаватель ММФ НИ ТГУ Челнокова А.С.

Конференция и издание сборника поддержаны Региональным научно-образовательным математическим центром Томского государственного университета за счет средств субсидии в целях оказания федеральным государственным учреждениям дополнительной государственной поддержки (соглашение № 075-02-2022-884).

ISBN 978-5-6047451-5-1



© ООО «Издательство «Красное знамя», 2022

Оглавление

1. Численное моделирование процесса самоочищения сточных вод с применением различных типов биофильтров
А.В. Амзаракова, М.Д. Михайлов..... 6
2. Об аппроксимации решений параболической системы Ламе из пространства Лебега более регулярными решениями
П.Ю. Вилков, А.А.Шлапунов..... 12
3. Об одномерных гомологиях алгебраической кривой в двумерном проективном пространстве
Н.А. Бушуева, И.В. Овчинникова..... 14
4. О цепях коммутантов линейных групп второго порядка
А.М. Елфимова, Е.А. Тимошенко 20
5. Автоморфизмы нильтреугольного подкольца алгебры Шевалле типа G_2
А.В. Казакова..... 28
6. Численное решение прямой задачи переноса примеси
Е.А. Каратаева..... 32
7. Моделирование зажигания строительных материалов частицами, нагретыми до высокой температуры
Д.П. Касымов, Е.Н. Голубничий, В.В. Перминов, А.С. Якимов..... 43
8. Определение статистически значимых факторов возникновения сердечно-сосудистых заболеваний
С.Б. Кологривова, Е.А. Пчелинцев..... 53
9. Статистический анализ страхового рынка в РФ
Е.А. Кузнецова, Е.А. Пчелинцев..... 60
10. Различные аппроксимации конвективных слагаемых в задачах естественной конвекции
М.Н. Мамзиков, М.А. Шеремет..
..... 69

11. Численное моделирование теплообмена и химического реагирования равновесно диссоциирующего газа П.С. Мартынов, О.В. Матвиенко..... 78
12. Исследование смешения вязких жидкостей в статическом смесителе О. В. Матвиенко, В. А. Ромащенко А. Е. Литвинова 86
13. Исследование установившегося течения жидкости рейнера – ривлина в цилиндрической трубе О. В. Матвиенко, Н. С. Фирсанова..... 96
14. Оценка интенсивности радиоизлучения в окрестности фокуса параболического рефлектора Л.С. Мищенко, М.С. Бухтяк. 108
15. Решение больших систем линейных алгебраических уравнений с использованием параллельных технологий программирования И.А. Подтихов, А.В. Старченко..... 117
16. Влияние определяющих параметров на зарядку/разрядку теплового аккумулятора на основе пористых сред А.П. Поронова, М.А. Шеремет..... 128
17. Построение регрессионной модели числа самоубийств от социально-экономических факторов с использованием регуляризации М.А. Пурясева..... 135
18. Исследование влияния типа заряда на характеристики ударной трубы А.А. Старосельцева, Е.Л. Лобода..... 143
19. Скорейшее обнаружение эпидемий Р.О. Теньзин, С.М. Пергаменщиков, Е.А. Пчелинцев 149
20. О локальном решении модели Кокса – Ингерсолла – Росса А.Ю. Трошин, Т.В. Емельянова 156

21. Об одном алгоритме расчета прочности и термонапряженности неоднородных пластин из трансверсально-изотропных композиционных материалов И.Х. Хамзаев, С.С. Ахтамбаев 162
22. Численное решение задачи типа «хищник – жертва» с учетом миграционных процессов А.Н. Хамидов, М.Д. Михайлов 167
23. О фундаментальном решении не С-линейного возмущения оператора Коши – Римана Ю.А Хорьякова. 175
24. Разностные схемы высокого порядка аппроксимации для решения гиперболических уравнений А.С. Чижова, В.И. Лаева 178

Численное моделирование процесса самоочищения сточных вод с применением различных типов биофильтров

А.В. Амзаракова, М.Д. Михайлов

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. Предлагается модификация классической модели Стритера – Фелпса. Исследуется влияние капельного и высоконагружаемого биофильтров в численной модели процесса самоочищения сточных вод. Выбирается наиболее эффективный тип биофильтра.

Ключевые слова: самоочищение, биофильтр, разностная схема, модель, неявный метод.

Основными источниками загрязнения реки Томи являются предприятия Кемеровской, Новосибирской, Томской областей и Республики Хакасия. Они ежегодно сбрасывают свыше 1 100 тыс. т загрязняющих веществ, в том числе нефтепродуктов – 540 тыс. т, хлоридов – 116 тыс. т, нитратов – 3 тыс. т и других. От общего числа загрязнений бассейна Томи 93,6 % составляют предприятия Кемеровской области, а на предприятия Томской области приходится 6,3 % [1].

Проблемой очистки сточных вод занимались многие российские ученые. Среди них можно назвать: С.В. Яковлева, занимавшегося разработкой физико-химических методов очистки природных и сточных вод; Ю.И. Шокина, который изучал распространение загрязнения по участку реки; О.Г. Савичева, исследовавшего состояние речных вод Томской области, и других авторов [2].

Каждый водоем представляет собой сложную систему, где обитают бактерии, водоросли, высшие водные растения и различные беспозвоночные животные. Совместная деятельность обитателей обеспечивает самоочищение водоема. Факторы самоочищения могут быть многообразными.

В работе рассматривается математическая модель, описывающая процесс самоочищения, кислородного баланса в реках и биологическую очистку с помощью очистного сооружения – биофильтра. Он предназначен для фильтрации сточной воды через загрузочный материал, который покрыт биологической пленкой, образованной колониями микроорганизмов [3].

Целью работы является проверка скорости процесса очистки при использовании различных типов биофильтров и выбор очистного сооружения, осуществляющего этот процесс за наименьшее время.

В работе рассматривались следующие задачи:

- Модификация классической модели Стритера – Фелпса.
- Определение точного и численного решений модифицированной модели.
- Оценка погрешности аппроксимации, устойчивости и сходимости выбранного численного метода.
- Сравнение результатов расчетов точного и приближенного решений, полученных с использованием различных типов биофильтров.
- Выбор наиболее эффективного типа биофильтра.

Одной из первых работ, посвященных процессу самоочистения водных объектов, является классическая модель Стритера – Фелпса [4]. Она описывает процесс взаимодействия воды, растворенного в ней кислорода и органических веществ. Разложение загрязнения происходит под воздействием бактерий, вызывающих химическую реакцию с использованием кислорода.

Предлагается модификация модели Стритера – Фелпса путем добавления в нее соотношения $-kL$, которое определяет величину изъятого из сточных вод загрязнения с помощью биофильтра. В результате получается задача Коши, описываемая системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= -k_1L - kL, \\ \frac{dD}{dt} &= k_1L - k_2D,\end{aligned}\tag{1}$$

с соответствующими начальными условиями:

$$L(0) = L^0, D(0) = D^0.\tag{2}$$

В системе (1) t – время, сут, $L(t)$ – концентрация органического вещества, мг/л, k_1 – коэффициент разложения загрязнителя, 1/сут, k – константа скорости изъятия органических загрязнений, 1/сут. $D(t)$ – дефицит кислорода, мг/л, определяемый по формуле $D = q - q_0$, где q – реальная концентрация кислорода в воде, а q_0 – равновесная, при отсутствии загрязнения, k_2 – коэффициент аэрации, 1/сут.

В качестве очистных сооружений рассматриваются капельный и высоконагружаемый биофильтры.

В сооружении капельного биофильтра сточная вода подается в виде капель или струй. Естественная вентиляция воздуха осуществляется через открытую поверхность биофильтра и дренаж.

Такие биофильтры имеют низкую нагрузку по воде – обычно 0,5–2 м³ на 1 м³ объема загрузочного материала в сутки, их рекомендуется применять для полной биологической очистки сточных вод.

Отличительной особенностью высоконагружаемого биофильтра является более высокая, по сравнению с капельным, окислительная мощность, что обусловлено меньшей его заиляемостью и лучшим обменом воздуха. Достигается это благодаря крупным фракциям загрузочного материала и повышенной в несколько раз нагрузке по воде. Высокая скорость движения сточной воды в сооружении обеспечивает постоянный вынос задержанных трудноокисляемых нерастворенных примесей и отмирающей биопленки. Поступающий в тело биофильтра кислород воздуха расходуется в основном на биологическое окисление части загрязнений, не вынесенных из тела биофильтра. Высоконагружаемые биофильтры предназначаются для неполной и полной биологической очистки сточных вод [5].

Для каждого из вышеприведенных биофильтров были найдены соответствующие значения параметра k [2], который используется в системе (1).

Решение задачи Коши осуществляется с помощью неявного разностного метода. Полученное численное решение сравнивается с точным, которое определено в работе для поставленной задачи в виде:

$$L(t) = L^0 e^{-(k_1+k)t},$$

$$D(t) = \frac{k_1 L^0}{k_2 - k_1 - k} e^{-(k_1+k)t} + \left(D^0 - \frac{k_1 L^0}{k_2 - k_1 - k}\right) e^{-k_2 t}. \quad (3)$$

Для нахождения численного решения задачи (1) – (2) используется неявный метод трапеций:

$$\begin{cases} \frac{L_{j+1} - L_j}{\tau} + \frac{k_1 + k}{2} (L_{j+1} + L_j) = 0, \\ \frac{D_{j+1} - D_j}{\tau} + \frac{k_2}{2} (D_{j+1} + D_j) - \frac{k_1}{2} (L_{j+1} + L_j) = 0, j = \overline{0, N-1}, \\ L_0 = L^0, \\ D_0 = D^0. \end{cases} \quad (4)$$

Показано, что разностная задача (4) аппроксимирует задачу Коши (1) – (2) со 2-м порядком аппроксимации относительно шага по времени τ и является абсолютно устойчивой по начальным данным. Следовательно, по теореме Лакса решение разностной задачи сходится к решению соответствующей дифференциальной.

Результаты. В качестве загрязняющего вещества рассматриваются нефтепродукты. Значение концентрации загрязнения нефтепродуктами реки Томи взято из экологического мониторинга Томской области и составляет 0,619 мг/л [6].

Проводится сравнение точного (3) и численного решений для концентрации загрязняющего вещества $L(t)$ в реке Томи и дефицита

кислорода $D(t)$ без использования (при скорости изъятия органических загрязнений $k = 0,0 \frac{1}{сут}$) и с использованием капельного ($k = 4,4 \frac{1}{сут}$) и высоконагружаемого ($k = 7,08 \frac{1}{сут}$) биофильтров. Результаты численных расчетов представлены в виде графиков.

Анализ полученных результатов показывает, что при начальной концентрации L^0 начинается процесс самоочищения, в результате которого происходит окисление загрязнителя и за счет этого наблюдается уменьшение концентрации органического вещества и рост дефицита кислорода. Так как с течением времени концентрация нефтепродуктов падает, то уменьшается дефицит кислорода.

На рисунках 1 и 2 приведены сравнения точного и численного решений для концентрации органического вещества $L(t)$ и дефицита кислорода $D(t)$ без применения биофильтра. На рис. 1 прослеживается постепенное падение концентрации нефтепродуктов примерно за 50 суток от 0,619 мг/л до 0,001 мг/л.

На рис. 2 происходит рост величины дефицита кислорода за 1,5 суток от 0 мг/л до 0,033 мг/л с последующим восстановлением до равновесной концентрации кислорода в воде 0,000069 мг/л (69 нг/л).

На рис. 3 и 4 проводятся аналогичные сравнения, но уже с использованием капельного биофильтра. Применение биофильтра этого типа ускоряет процесс очищения до 1,41 суток (34 часов), а дефицит кислорода падает до 0,0018 мг/л.

Применение высоконагружаемого биофильтра (рис. 5 и 6) уменьшает время очищения вод от нефтепродуктов до 0,888 суток (21 часа). Дефицит кислорода падает до 0,0026 мг/л.

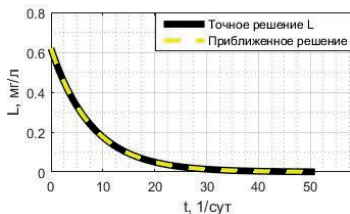


Рис. 1. График сравнения приближенного и точного решений концентрации органического вещества $L(t)$ без использования биофильтра

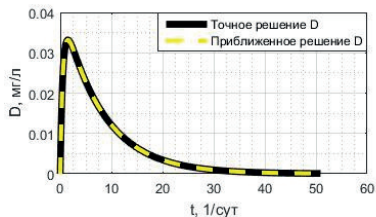


Рис. 2. График сравнения приближенного и точного решений дефицита кислорода $D(t)$ без использования биофильтра

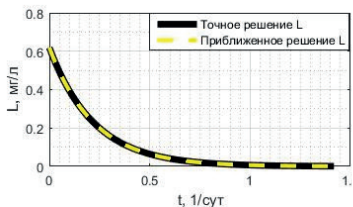


Рис. 3. График сравнения приближенного и точного решений концентрации органического вещества $L(t)$ с использованием капельного биофильтра

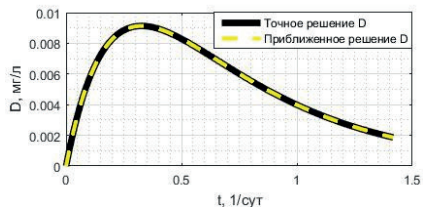


Рис. 4. График сравнения приближенного и точного решений дефицита кислорода $D(t)$ с использованием капельного биофильтра

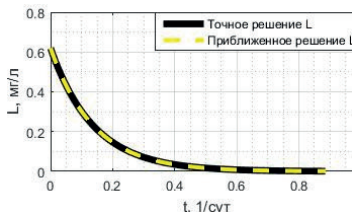


Рис. 5. График сравнения приближенного и точного решений концентрации органического вещества $L(t)$ с использованием высоконагружаемого биофильтра

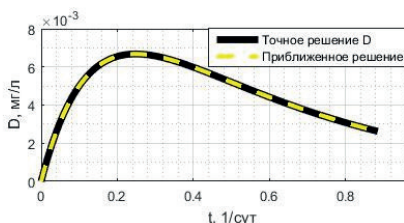


Рис. 6. График сравнения приближенного и точного решений дефицита кислорода $D(t)$ с использованием высоконагружаемого биофильтра

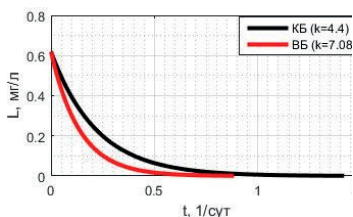


Рис. 7. График сравнения приближенных решений концентрации органического вещества $L(t)$ с использованием капельного (КБ) и высоконагружаемого (ВБ) биофильтров

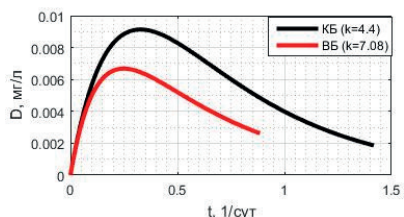


Рис. 8. График сравнения приближенных решений дефицита кислорода $D(t)$ с использованием капельного и высоконагружаемого биофильтров

Сравнение результатов, полученных с помощью капельного и высоконагружаемого биофильтров, позволяет сделать вывод о том, что

высоконагружаемый биофильтр эффективнее капельного в 1,6 раза (см. рис.7).

На рис. 8 приводятся результаты численных расчетов для $D(t)$ с использованием вышеуказанных биофильтров. При использовании капельного биофильтра максимальное значение дефицита кислорода составляет 0,0091 мг/л, а при использовании высоконагружаемого – 0,0067 мг/л.

Выводы. Максимальная относительная погрешность концентрации органического вещества $L(t)$ и дефицита кислорода $D(t)$ с использованием и без использования биофильтров составляет около 0,025 %. В результате проведенных исследований показано, что использование биофильтров существенно ускоряет процесс самоочищения в водоемах (в 43,5 раза). Наиболее эффективное воздействие на очищение сточных вод от нефтепродуктов оказывает высоконагружаемый биофильтр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Экологический мониторинг // Состояние окружающей среды Томской области в 1998 г. – Томск, 1999. – 231 с.*
2. *С.В. Яковлев, Ю.В. Воронов. Биологические фильтры. – М.: Стройиздат, 1982. – 121 с.*
3. *М.Г. Семичева. Оценка воздействия сброса сточных вод ООО «Сибирская карандашная фабрика, г. Томск» на качество воды р. Томи. – Томск, 2018. – 87 с.*
4. *Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках – М. : Наука, 1983. – 158 с.*
5. *Ю.В. Воронов, С.В. Яковлев. Водоотведение и очистка сточных вод. – М. : Издательство Ассоциации строительных вузов, 2006. – 704 с.*
6. *Экологический мониторинг: Состояние окружающей среды Томской области в 2005 г. – Томск, 2006. – 148 с.*

Амзаракова Анастасия Владимировна, магистрант, Национальный исследовательский Томский государственный университет, nasty.a.amzarakova.00@mail.ru.

Михайлов Михаил Дмитриевич, старший преподаватель, Национальный исследовательский Томский государственный университет, michel@math.tsu.ru.

Об аппроксимации решений параболической системы Ламе из пространства Лебега более регулярными решениями

П.Ю. Вилков, А.А. Шлапунов

Сибирский федеральный университет, Красноярск

В данной работе доказана теорема о приближении одного класса решений параболических систем типа Ламе класса Лебега $L^2(\omega \times (T_1, T_2))$ в цилиндрической области $\omega \times (T_1, T_2) \subset \mathbb{R}^n$ более регулярными решениями в большей области $\Omega \times (T_1, T_2)$, см. похожие результаты для уравнения теплопроводности [1–3]. Рассмотрим сильно равномерно параболический оператор [4] типа Ламе в \mathbb{R}^{n+1} , $\mathcal{L}_{x,t} = \frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{div}_n(\mu \nabla_n) - \nabla_n((\mu + \lambda) \operatorname{div}_n)$. Пусть теперь $S_{\mathcal{L}}(\Omega \times (T_1, T_2))$ обозначает множество всех обобщенных функций на $\Omega \times (T_1, T_2)$, удовлетворяющих однородному уравнению Ламе. Кроме того, отметим, что в силу гипозэллиптичности оператора \mathcal{L} решения однородного уравнения бесконечно дифференцируемы на всей области определения. Помимо введенных выше пространств нам потребуется пространство $S_{\mathcal{L}}(\overline{\Omega \times (T_1, T_2)})$, определенное как объединение пространств $\bigcup_{T_1, T_2} S_{\mathcal{L}}(\overline{\Omega_{T_1, T_2}})$ по всем областям $\Omega \times (T_1, T_2)$, содержащим замыкание области $\Omega \times (T_1, T_2)$.

Основным результатом работы является теорема:

Теорема 1. Если $\omega \subset \Omega$ и $\partial\omega, \partial\Omega \in C^2$, то $S_{\mathcal{L}}(\overline{\Omega \times (T_1, T_2)})$ всюду плотно в $L^2(\omega \times (T_1, T_2))$ тогда и только тогда, когда $\Omega \setminus \omega$ не имеет компактных компонент Ω .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *B. F. Jones, Jr., An approximation theorem of Runge type for the heat equation, Proc. Amer. Math. Soc., 52:1 (1975), 289–292.*
2. *Tarkhanov, N., The Analysis of Solutions of Elliptic Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL, 1997.*
3. *Шлапунов А.А. Об аппроксимации решений уравнения теплопроводности класса Лебега L^2 более регулярными решениями. Математические заметки, том 111.*
4. *С. Д. Эйдельман, Параболические уравнения, Дифференциальные уравнения с частными производными – 6, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 63, ВИНТИ, М., 1990, 201–313.*

Вилков Павел Юрьевич, бакалавр, Сибирский федеральный университет, pavel_vilkov17@mail.ru.

Шлапунов Александр Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский Федеральный Университет, ashlapunov@sfu-kras.ru.

Об одномерных гомологиях алгебраической кривой в двумерном проективном пространстве

Н.А. Бушуева, И.В. Овчинникова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Аннотация Рассматривается задача описания одномерной группы гомологий замыкания алгебраической кривой в проективной компактификации двумерного комплексного пространства. Описывается способ построения базиса данной группы на основе применения метода матриц инциденций.

Ключевые слова: комплексное проективное пространство, группа гомологий, алгебраическая кривая, матрица инциденций.

При вычислении интегралов от форм с особенностями на алгебраической кривой эффективно используются методы теории вычетов. Для их применения необходимо понимать, как расположены циклы интегрирования в дополнении к множеству особенностей формы, а также каково устройство базиса группы гомологий алгебраической кривой. В работах А.П. Южакова и А.К. Циха (см. [1, 2]) установлена двойственность одномерной группы гомологий замыкания алгебраической кривой и двумерных гомологий ее дополнения для сферической и проективной компактификаций двумерного комплексного пространства, вычислена размерность данных групп и описаны базисные циклы для случая сферической компактификации. В данной работе описывается способ построения базиса одномерной группы гомологий замыкания алгебраической кривой в проективном пространстве $\mathbb{C}P^2$.

Размерность одномерной группы гомологий алгебраической кривой в сферической и проективной компактификациях

Рассмотрим алгебраическую кривую T в двумерном комплексном пространстве \mathbb{C}^2 :

$$T = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2: Q(w, z) = 0\},$$

где $Q(w, z) = Q_1^{r_1} \cdot \dots \cdot Q_m^{r_m}$ является произведением неприводимых полиномов $Q_1(w, z), \dots, Q_m(w, z)$.

Размерность группы одномерных гомологий замыкания T в сферической и проективной компактификациях пространства \mathbb{C}^2 описывается следующей теоремой (см. [1, 2]).

Теорема 1 (Южаков, Цих). Пусть \bar{T} – замыкание алгебраической кривой T в проективной или сферической компактификации пространства \mathbb{C}^2 . Размерность группы $H_1(\bar{T})$ определяется формулой

$$(1) \dim H_1(\bar{T}) = \sum_{j=1}^m 2\rho_j + \sum_{i=1}^s (q_i - 1) - m + 1,$$

где ρ_j – род римановой поверхности алгебраической функции, определяемой уравнением $Q_j = 0$; q_i – число неприводимых компонент множества \bar{T} в его i -й точке самопересечения; s – число точек самопересечения множества \bar{T} ; m – число различных неприводимых множителей Q_1, \dots, Q_m полинома Q .

В недавних исследованиях теорема 1 была обобщена на случай торического многообразия (см. [3]). Однако вопрос о существовании двойственности гомологий кривой и ее дополнения в торическом многообразии остается открытым.

Построение базиса одномерных гомологий алгебраической кривой в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ при помощи матриц инцидентий

Для построения базиса одномерных гомологий замыкания поверхности в проективном пространстве предлагается использовать алгоритм, основанный на применении метода матриц инцидентий.

Идея предлагаемого метода заключается в том, чтобы вместо поверхности \bar{T} рассмотреть симплициальный комплекс K , одномерные гомологии которого соответствуют части базиса $H_1(\bar{T})$.

Перейдем к описанию конструкции. В качестве 0-мерных симплексов комплекса K рассмотрим:

- A_i – точки поверхности \bar{T} , в которых пересекаются различные неприводимые компоненты, $i = \overline{1, s}$;
- B_j – точки на неприводимых компонентах T_j , при этом каждой компоненте соответствует одна точка, $j = \overline{1, m}$.

В качестве 1-мерных симплексов положим:

- $A_i B_j$ – криволинейные симплексы на T_j , соединяющие точки A_i и B_j в случае, если $A_i \in \bar{T}_j$.

Ориентируем симплексы от B_j к A_i .

В результате получаем 1-мерный комплекс K , базисные циклы которого соответствуют базисным циклам на самой поверхности.

Для нахождения базиса $H_1(K)$ воспользуемся методом матриц инциденций. При этом для комплекса составляются матрицы инциденций, далее, следуя известному алгоритму преобразования матриц, можно вычислить все группы гомологий комплекса (см. [4, 5]).

Процессу приведения матрицы к каноническому виду соответствуют преобразования цепей, в результате которых выявляются базисные циклы групп гомологий.

В нашем случае исходная матрица инциденций имеет специфический вид: в верхних s строках матрицы расположены 1 и 0, а в оставшихся – 1 и 0.

В согласии с процессом приведения матрицы к каноническому виду соответствующие преобразования 1-симплексов приводят к набору 1-циклов на поверхности, число которых равно числу нулевых столбцов приведенной матрицы, а именно $\sum_{i=1}^s (\tilde{q}_i - 1) + m - 1$, где \tilde{q}_i – число неприводимых компонент \bar{T} , пересекающихся в A_i .

Для завершения построения базиса к полученным выше циклам необходимо добавить канонические циклы и циклы самопересечения.

Канонические – циклы на компонентах \bar{T}_j , соответствующие параллелям и меридианам ручек. Их число равно $\sum_{i=1}^m 2\rho_i$.

В случае если в точке A_i пересекаются q_{ik} элементов компоненты \bar{T}_k , где $q_{ik} > 1$, строим циклы самопересечения, которые выходят из A_i последовательно по разным элементам, а возвращаются по тому, который был использован при построении комплекса K . В результате к общему числу добавляется $\sum_{i=1}^s (q_k - 1)$ циклов.

Построенные циклы гомологически независимы. Их число равно размерности $H_1(\bar{T})$, вычисленной по формуле 1.

Пример. В качестве иллюстрации применения метода матриц инцидентий рассмотрим кривую

$$T = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2: w(w^2 - z^3)(w^2 - z^3 - z^4) = 0\},$$

которая состоит из трех неприводимых компонент: $T_1 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2: w = 0\}$, $T_2 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2: w^2 - z^3 = 0\}$ и $T_3 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2: w^2 - z^3 - z^4 = 0\}$.

В комплексном пространстве \mathbb{C}^2 кривая T имеет две точки пересечения: $(0, 0) = T_1 \cap T_2 \cap T_3$ и $(0, -1) \in T_1 \cap T_3$. В проективной компактификации $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ у компонент T_1 и T_2 уходят на бесконечность по одной ветви, у кривой T_3 — две. При этом на бесконечности добавляются: одна точка к T_1 и одна к T_2 и T_3 . Все три компоненты кривой T имеют род 0 (см. рис. 1).

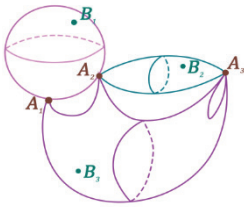


Рис. 1. Замыкание кривой T в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$

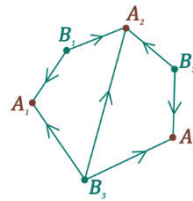


Рис. 2. Комплекс K

Отметим точки для построения 0-мерных и 1-мерных симплексов вспомогательного комплекса. Соответствующий симплициальный комплекс изображен на рис. 2. Следующим шагом является построение матрицы инцидентий.

Исходная матрица инцидентий имеет вид:

$$M = \begin{matrix} & B_1A_1 & B_3A_1 & B_1A_2 & B_2A_2 & B_3A_2 & B_2A_3 & B_3A_3 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Матрица после приведения к каноническому виду:

$$M = \begin{matrix} & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

где

$$E_1 = B_1A_1 + A_1B_3 + B_3A_3 + A_3B_2 + B_2A_2 + A_2B_1,$$

$$E_2 = B_2A_2 + A_2B_3 + B_3A_3 + A_3B_2,$$

$$E_3 = B_2A_1,$$

$$E_4 = B_1A_2 - B_3A_2 + B_2A_3,$$

$$E_5 = B_2A_3 + B_3A_3 + B_2A_3,$$

$$E_6 = B_3A_2 + B_2A_3,$$

$$E_7 = B_3A_3 + B_2A_3.$$

Суммы E_1 и E_2 , соответствующие нулевым столбцам матрицы, являются циклами.

В итоге применения метода инцидентий построены два базисных цикла, к которым необходимо добавить еще один цикл самопересечения E_8 . Циклы E_1, E_2, E_8 образуют базу одномерных гомологий \bar{T} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Н. : Наука, 1979, 368 с.
2. Цих А.К. Двумерные гомологии дополнения алгебраической кривой в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ // Изв. вузов. Математика. 1977. № 5. С. 122–124.
3. Бушueva Н.А., Овчинникова И.В. О размерности группы одномерных гомологий алгебраической кривой в двумерном торическом многообразии // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы X Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня

рождения профессора Майера Роберта Адольфовича. 2021. С. 28–31.

4. *Фоменко А.Т. Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире. М.: Издательство Московского университета, 1998, 416 с.*
5. *Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 448 с.*

Бушueva Наталья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций ИМиФИ СФУ, nbushueva@sfu-kras.ru.

Овчинникова Илона Владимировна, магистр ИМиФИ СФУ, blumenil@bk.ru.

* Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

О цепях коммутантов линейных групп второго порядка

А.М. Елфимова, Е.А. Тимошенко

*Национальный исследовательский Томский государственный
университет, Томск*

Аннотация. Показано, что все коммутанты полной и специальной линейных групп второго порядка над произвольным подкольцом поля \mathbf{Q} нетривиальны.

Ключевые слова: специальная линейная группа, полная линейная группа, коммутант, цепь коммутантов, вполне характеристическая подгруппа.

Всюду далее под R понимается некоторое подкольцо поля рациональных чисел \mathbf{Q} .

Как обычно, через $GL_n(S)$ мы обозначаем полную линейную группу порядка n над коммутативным кольцом с единицей S , а через $SL_n(S)$ обозначаем специальную линейную группу (т. е. подгруппу группы $GL_n(S)$, состоящую из всех матриц с определителем 1).

Напомним, что *коммутатор* элементов x и y группы G – это элемент $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Подгруппа группы G , которая порождается множеством всех коммутаторов данной группы, называется ее *коммутантом* и обозначается через G' или $G^{(1)}$.

Через $G^{(k)}$ обозначаем k -й коммутант группы G , т. е. группу, порождаемую всеми элементами вида $[x, y]$, где $x, y \in G^{(k-1)}$.

Ранее была доказана

Теорема 1 [1]. Пусть $G = GL_n(R)$ или $G = SL_n(R)$. Если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $n > 2$;
- 2) $n = 2$ и $6R = R$,

то для всякого натурального k выполнено $G^{(k)} = SL_n(R)$. ■

Выясним теперь, как устроены цепи коммутантов линейных групп над кольцом R в случае, когда $n = 2$ и $6R \neq R$.

Нетрудно установить следующий факт

Предложение 2. Если $pR \neq R$, где p – простое число, то для любого натурального k кольцо $R/p^k R$ изоморфно кольцу $\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}$.

■

Пусть $\pi: Q \rightarrow S$ – гомоморфизм коммутативных колец с единицей. Для всякой (2×2) -матрицы $A = (a_{ij})$ с элементами из Q через $\rho(A)$ обозначим (2×2) -матрицу $(\pi(a_{ij}))$ с элементами из S . Заметим, что отображение ρ является гомоморфизмом колец $M_2(Q) \rightarrow M_2(S)$, где через $M_2(Q)$ и $M_2(S)$ обозначены кольца матриц порядка 2 над Q и S соответственно.

Несложно убедиться, что верно

Предложение 3. Кольцевой гомоморфизм ρ индуцирует групповой гомоморфизм $GL_2(Q) \rightarrow GL_2(S)$.

Предложение 4. Для всякого натурального k группа $GL_2(\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z})$, где $p \in \{2, 3\}$, имеет тривиальный $(k+3)$ -й коммутант.

Доказательство. Проведем индукцию по k .

База индукции: непосредственно проверяется, что 4-й коммутант группы $GL_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ тривиален.

Пусть теперь для некоторого $k \in \mathbf{N}$ известно, что $(k+3)$ -й коммутант группы $GL_2(\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z})$ тривиален. Покажем, что из этого следует тривиальность $(k+4)$ -го коммутанта группы $GL_2(\mathbf{Z}/p^{k+1} \mathbf{Z})$.

Отображение, сопоставляющее элементу $\bar{x} = x + p^{k+1} \mathbf{Z}$, где $x \in \mathbf{Z}$ элемент $x + p^k \mathbf{Z}$, задает гомоморфизм колец $\mathbf{Z}/p^{k+1} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}$.

Полные линейные группы $GL_2(\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z})$ и $GL_2(\mathbf{Z}/p^{k+1} \mathbf{Z})$ обозначим через G и F соответственно. Пусть $\varphi: F \rightarrow G$ – гомоморфизм,

ставящий в соответствие всякой матрице $A = (x_{ij} + p^{k+1}\mathbf{Z}) \in F$ матрицу $\varphi(A) = (x_{ij} + p^k\mathbf{Z}) \in G$. Заметим, что $\varphi(F^{(k+3)}) \subset G^{(k+3)}$.

Обозначим через E_k единичную матрицу с элементами из кольца $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$. Так как $G^{(k+3)} = \{E_k\}$, то для любой матрицы $A \in F^{(k+3)}$ выполняется равенство $\varphi(A) = E_k$. Таким образом, всякая матрица из $F^{(k+3)}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \overline{1+ap^k} & \overline{bp^k} \\ \overline{cp^k} & \overline{1+dp^k} \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Пусть матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1+ap^k} & \overline{bp^k} \\ \overline{cp^k} & \overline{1+dp^k} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \overline{1+qp^k} & \overline{rp^k} \\ \overline{sp^k} & \overline{1+tp^k} \end{pmatrix}$$

взяты из $F^{(k+3)}$. Заметим, что A и B принадлежат F' , а значит, имеют определители, равные 1. Следовательно, определитель матрицы AB тоже равен 1.

Напомним, что если матрица $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ имеет определитель,

равный 1, то $P^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

Найдем произведение матриц A и B , учитывая, что $2k \geq k+1$:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \overline{1+ap^k} & \overline{bp^k} \\ \overline{cp^k} & \overline{1+dp^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1+qp^k} & \overline{rp^k} \\ \overline{sp^k} & \overline{1+tp^k} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \overline{1+(a+q)p^k + (aq+bs)p^{2k}} & \overline{(b+r)p^k + (ar+bt)p^{2k}} \\ \overline{(c+s)p^k + (cq+ds)p^{2k}} & \overline{1+(d+t)p^k + (cr+dt)p^{2k}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \overline{1+(a+q)p^k} & \overline{(b+r)p^k} \\ \overline{(c+s)p^k} & \overline{1+(d+t)p^k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$\begin{aligned}
A^{-1}B^{-1} &= \begin{pmatrix} \overline{1+dp^k} & \overline{-bp^k} \\ \overline{-cp^k} & \overline{1+ap^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1+tp^k} & \overline{-rp^k} \\ \overline{-sp^k} & \overline{1+qp^k} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \overline{1+(d+t)p^k} & \overline{-(b+r)p^k} \\ \overline{-(c+s)p^k} & \overline{1+(a+q)p^k} \end{pmatrix} = (AB)^{-1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $[A, B] = A^{-1}B^{-1}AB = E_{k+1}$. В силу произвольного выбора матриц $A, B \in F^{(k+3)}$ имеем $F^{(k+4)} = \{E_{k+1}\}$. ■

Следствие 5. Если $pR \neq R$, где $p \in \{2, 3\}$, то для всякого $k \in \mathbb{N}$ группа $GL_2(R/p^kR)$ имеет тривиальный $(k+3)$ -й коммутант.

Доказательство. Изоморфизм колец $R/p^kR \cong \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ индуцирует изоморфизм групп $GL_2(R/p^kR) \cong GL_2(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})$. Тогда в силу предложения 4 получаем требуемое утверждение. ■

Теорема 6. Пусть $G = GL_2(R)$ или $G = SL_2(R)$. Если $pR \neq R$, где $p \in \{2, 3\}$, то

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G^{(k)} = \{E\},$$

где E – единичная матрица второго порядка.

Доказательство. Ясно, что достаточно будет рассмотреть случай $G = GL_2(R)$.

Очевидно, что $E \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$. Предположим, что нашлась матрица

A , отличная от E и такая, что $A \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$. Можно записать

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 \\ a_3 & 1+a_4 \end{pmatrix},$$

где $a_j \in R$, причем среди чисел a_j есть отличные от нуля.

Вынесем из всякого ненулевого a_j максимальную степень числа p . Тогда можно записать равенство

$$A = \begin{pmatrix} 1 + b_1 \cdot p^{m_1} & b_2 \cdot p^{m_2} \\ b_3 \cdot p^{m_3} & 1 + b_4 \cdot p^{m_4} \end{pmatrix},$$

где $b_j = m_j = 0$, если $a_j = 0$, и $b_j \in R \setminus pR$, если $a_j \neq 0$ ($1 \leq j \leq 4$).

Пусть $m = \max(m_1, m_2, m_3, m_4)$ и $\pi: R \rightarrow R/p^{m+1}R$ – канонический гомоморфизм. Через φ мы обозначим групповой гомоморфизм $G \rightarrow GL_2(R/p^{m+1}R)$, сопоставляющий всякой матрице $A = (a_{ij}) \in G$ матрицу $\varphi(A) = (\pi(a_{ij})) \in GL_2(R/p^{m+1}R)$.

Из следствия 5 видно, что $(m+4)$ -й коммутант полной линейной группы $GL_2(R/p^{m+1}R)$ тривиален, а значит, образ всякой матрицы из $G^{(m+4)}$ при гомоморфизме φ совпадает с единичной матрицей.

Из сказанного следует, что матрица A не принадлежит $G^{(m+4)}$, поскольку ее образ при отображении φ не равен единичной матрице. Это противоречит тому, что $A \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$.

Тем самым теорема доказана. ■

Покажем, что в ситуации из теоремы 6 цепь коммутантов не стабилизируется (в отличие от ситуации из теоремы 1).

Определение 7. Квадратная матрица, у которой:

- 1) на главной диагонали стоят единицы;
- 2) на пересечении i -й строки и j -го столбца ($i \neq j$) стоит некоторый элемент $t \in R$;
- 3) все элементы, находящиеся вне главной диагонали не в позиции (i, j) , равны нулю,

обозначается через $T_{ij}(t)$ и называется *транскекцией*.

Определение 8. Подгруппа H группы G называется *вполне характеристической*, если для всякого эндоморфизма $\varphi: G \rightarrow G$ выполнено $\varphi(H) \subset H$.

Нетрудно убедиться, что справедливо

Предложение 9. Для любого натурального k группа $G^{(k)}$ является вполне характеристической подгруппой группы G . ■

В частности, подгруппа $G^{(k)}$ группы G является нормальной:

Следствие 10. Если G – группа, то для любых $k \in \mathbf{N}$ и $x \in G^{(k)}$, $s \in G$ выполнено $s^{-1}xs \in G^{(k)}$. ■

$$\text{Положим } Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(R).$$

Лемма 11. Пусть $G = GL_2(R)$ или $G = SL_2(R)$. Для любых $k \in \mathbf{N}$ и $X \in G^{(k)}$ выполнено $X^T \in G^{(k)}$.

Доказательство. Заметим, что для всякой матрицы $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

из $SL_2(R)$ выполнено $Y^{-1}X^{-1}Y = X^T$. Действительно,

$$\begin{aligned} Y^{-1}X^{-1}Y &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $X \in G^{(k)}$. Тогда $X \in SL_2(R)$ и $X^T = Y^{-1}X^{-1}Y$. Так как $X^{-1} \in G^{(k)}$, то по следствию 10 матрица X^T также лежит в $G^{(k)}$. ■

Теорема 12. Для всякой матрицы $X \in SL_2(R)$, у которой оба элемента второй строки отличны от нуля, найдется $t \in R$ такое, что для $S = T_{12}(t)$ матрица $[X, S^{-1}XS]^T$ также имеет два ненулевых элемента во второй строке.

Доказательство. Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(R)$, где $c \neq 0$, $d \neq 0$, и

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(R).$$

Найдем матрицу $F = [X, Z]$:

$$F = X^{-1}Z^{-1}XZ = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \gamma b + \delta d & -\alpha b - \beta d \\ -\gamma a - \delta c & \alpha a + \beta c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha a + \gamma b & \beta a + \delta b \\ \alpha c + \gamma d & \beta c + \delta d \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} * & -\beta^2 cd + \beta(\gamma ab - \alpha bc - \delta d^2 + \delta ad) + \gamma \delta b^2 + \delta^2 bd - \alpha \delta bd \\ * & \beta^2 c^2 + \beta(\alpha ac - \gamma a^2 - \delta ac + \delta cd) - \gamma \delta ab - \delta^2 bc + \alpha \delta ad \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что существует $K > 0$ такое, что если

$$|\beta| > K \cdot \max(|\alpha|, |\gamma|, |\delta|), \quad (1)$$

то элементы f_{12} и f_{22} матрицы F отличны от нуля.

В качестве Z возьмем матрицу

$$\begin{aligned}
S^{-1}XS &= \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a - ct & b - dt \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ct + a & -ct^2 + (a-d)t + b \\ c & ct + d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тогда имеем $\alpha = -ct + a$, $\beta = -ct^2 + (a-d)t + b$, $\gamma = c$, $\delta = ct + d$. Заметим, что существует $t \in R$ такое, что выполнено (1). Получаем, что оба элемента второго столбца матрицы F , а значит, и оба элемента второй строки матрицы $F^T = [X, S^{-1}XS]^T$ отличны от нуля. ■

Теорема 13. Пусть $G = GL_2(R)$ или $G = SL_2(R)$. Тогда для всякого натурального k группа $G^{(k)}$ нетривиальна.

Доказательство. Докажем по индукции, что каждый коммутант группы G содержит матрицу, у которой оба элемента второй строки отличны от нуля.

База индукции: имеем $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [T_{21}(-1), T_{12}(1)] \in G'$.

Пусть теперь $k \geq 1$ и $G^{(k)}$ содержит матрицу X , у которой оба элемента второй строки отличны от нуля. Тогда для всякой матрицы $S \in SL_2(R)$ ввиду следствия 10 матрица $S^{-1}XS$ также лежит в $G^{(k)}$. Следовательно, $[X, S^{-1}XS] \in G^{(k+1)}$. Тогда по лемме 11 получаем, что $[X, S^{-1}XS]^T \in G^{(k+1)}$. Если взять в качестве S подходящую трансвекцию из теоремы 12, то получим, что матрица $[X, S^{-1}XS]^T$ имеет два ненулевых элемента во второй строке.

Итак, в $G^{(k+1)}$ есть матрица, у которой оба элемента второй строки отличны от нуля. Индукция завершена.

Таким образом, мы показали, что в каждом коммутанте группы G есть нетривиальная матрица. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елфимова А.М., Тимошенко Е.А. О линейных группах над кольцами // Все грани математики и механики: Сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 2020. С. 13–20.*
2. *Курош А.Г. Теория групп. М. : Наука, 1967.*

Елфимова Анастасия Максимовна, студентка ММФ ТГУ, elifimova.nastya@bk.ru.

Тимошенко Егор Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры ММФ ТГУ, tea471@mail.tsu.ru.

Автоморфизмы нильтреугольного подкольца алгебры Шевалле типа G_2

А.В. Казакова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Аннотация. Автоморфизмы унипотентных подгрупп U групп Лиева типа над полем K описал в 1970 году Дж. Гиббс [1] при $K = 6K$. Описание автоморфизмов нильтреугольных подколец Ли $N\Phi(K)$ над ассоциативно-коммутативным кольцом K с 1 для типа A_{n-1} получил В.М. Левчук в 1983 г. [2]. В 1986 г. А.С. Кондратьев [3] поставил вопрос об описании $\text{Aut } U$ даже над конечным полем и снятии ограничений, поставленных Гиббсом. Этот вопрос полностью решил В.М. Левчук в 1990 г. [4]. Там же на примере типа D_4 была показана возможность применения методов доказательств для описания автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ и начал рассматриваться вопрос об описании его автоморфизмов.

В 2007 г. [5, Cao Y., Jiang D., Wang D.] получили описание автоморфизмов алгебр Ли $N\Phi(K)$ при $K = 6K$. В 2017 г. А.В. Литаврин в [6] получил описание автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ типов B_n, C_n, D_n ($n > 4$) над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей.

Цель работы – описать автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебры Шевалле для исключительного типа G_2 .

Ключевые слова: автоморфизм, алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра.

II. 1. Алгебра Шевалле.

Алгебра Шевалле $L(C)$ над полем комплексных чисел C характеризуется системой корней Φ евклидова пространства. Система корней Φ – определенное конечное множество векторов евклидова пространства. При условии неразложимости они классифицированы, с точностью до эквивалентности, девятью сериями систем: 4 классических типа A_n, B_n, C_n, D_n и 5 исключительных типов E_6, E_7, E_8, G_2 и F_4 . Системы типа G_2 и F_4 выделяются из всех типов тем, что в них встречаются корни разных длин.

Алгебра Шевалле $L\Phi(C)$ характеризуется базой Шевалле, состоящей из векторов e_r ($r \in \Phi$) и подходящей базы подалгебры Картана, [8]. Подалгебру $N\Phi(C)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называем нильтреугольной.

К. Шевалле доказал [8, теорема 4.2.1], что базу в $L\Phi(C)$ можно выбрать так, что для любых $r, s \in \Phi^+$ будем иметь $e_r * e_s = 0$ при $r + s \notin \Phi$ и

$$e_r * e_s = N_{r,s} e_{r+s}, \quad N_{s,r} = -N_{r,s} \quad (r + s \in \Phi),$$

где $N_{r,s}$ – целочисленные структурные константы, равные ± 1 , ± 2 или Φ типа G_2 и $N_{r,s} = \pm 3$.

Целочисленность структурных констант позволила перейти к произвольному полю (или даже ассоциативно-коммутативному кольцу) коэффициентов K .

Через $NG_2(K)$ будем обозначать подалгебру $N\Phi(K)$ типа G_2 .

II. 2. Стандартные и гиперцентральные автоморфизмы.

В [2] и [7] выделяются внутренние, диагональные, кольцевые и центральные автоморфизмы.

Стандартный автоморфизм алгебры $N\Phi(K)$ – это произведение внутреннего, диагонального, кольцевого и центрального автоморфизмов.

В [1] и [5] появляется только один тип исключительных автоморфизмов.

Оказывается, когда аннулятор $2 \neq 0$, появляются исключительные автоморфизмы, что потребовало в [4] ввести для их систематизации гиперцентральные автоморфизмы.

Определение. Автоморфизм группы или кольца Ли L , являющийся неединичным (для $N\Phi(K)$ считают даже внешним) автоморфизмом по модулю $(m-1)$ -го гиперцентра и единичным по модулю m -го гиперцентра, называют гиперцентральным высоты m или, кратко, гиперцентральным автоморфизмом, когда L не совпадает с m -м гиперцентром.

Нам потребуется автоморфизм вида ($k \in K$)

$$\xi(k) : e_b \rightarrow e_b + ke_{3a+b}, \quad e_r \rightarrow e_r, \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+. \quad (2)$$

(Гиперцентральные автоморфизмы (2) высоты 2 называют автоморфизмами Гиббса.)

П. 3. Автоморфизмы кольца Ли $NG_2(K)$ над областью целостности K при $2K = K$.

Для кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над областью целостности характеристики 3 введем следующий исключительный автоморфизм.

$$\begin{aligned} \xi(t) : \quad e_a &\rightarrow e_a + te_{3a+b}, & e_{a+b} &\rightarrow e_{a+b} + te_{3a+2b}, \\ e_r &\rightarrow e_r, & \text{для остальных } r &\in \Phi^+. \end{aligned} \quad (3)$$

Теорема 1. Всякий автоморфизм Φ кольца Ли $NG_2(K)$ над областью целостности K : есть произведение стандартного автоморфизма и гиперцентрального автоморфизма (2) высоты 2 при $6K = K$, а также произведение стандартного автоморфизма и гиперцентральных автоморфизмов высоты 2 вида (2) и (3) при $2K = K$, $3K = 0$.

П. 4. Автоморфизмы кольца Ли $NG_2(K)$ над полем K при $2K = 0$.

Для кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над полем характеристики 2 введем следующие исключительные автоморфизмы.

$$\xi_1(t) : e_{2a+b} \rightarrow e_{2a+b} + te_{a+b}, \quad e_r \rightarrow e_r, \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xi_2(t) : \quad e_{2a+b} &\rightarrow e_{2a+b} + te_b, & e_{3a+b} &\rightarrow e_{3a+b} + te_{a+b}, \\ e_r &\rightarrow e_r, & \text{для остальных } r &\in \Phi^+. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \xi_3(t) : \quad e_b &\rightarrow e_b + te_{2a+b}, & e_{a+b} &\rightarrow e_{a+b} + te_{3a+b}, \\ e_r &\rightarrow e_r, & \text{для остальных } r &\in \Phi^+. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \xi_4(t) : \quad e_b &\rightarrow e_{2a+b}, & e_{a+b} &\rightarrow e_{3a+b}, & e_{2a+b} &\rightarrow e_b, & e_{3a+b} &\rightarrow e_{a+b}, \\ e_r &\rightarrow e_r, & \text{для остальных } r &\in \Phi^+. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть R – кольцо Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над полем K при $2K = 0$. Тогда произвольный автоморфизм Φ кольца R является произведением (два случая):

1) стандартного автоморфизма, автоморфизмов вида (5) и (6), а также гиперцентральных автоморфизмов высоты 2 вида (2) и (4);

2) автоморфизма вида (7), стандартного автоморфизма, автоморфизмов вида (5) и (6), а также гиперцентральных автоморфизмов высоты 2 вида (2), (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gibbs J.A. Automorphisms of certain unipotent groups. *J. Algebra*, 1970. Vol. 14. No.2. P. 203–208.
2. Левчук, В.М. Связи унитарной группы с некоторыми кольцами. Ч. 2. Группы автоморфизмов. *Сибирский матем. журнал*, 1983. Т. 24. № 4. С. 543–557.
3. Кондратьев А.С. Подгруппы конечных групп Шевалле. *Успехи математических наук*, 1986. Т. 41. № 1 (247). С. 57–96.
4. Левчук В.М. Автоморфизмы унитарных подгрупп Шевалле. *Алгебра и Логика*, 1990. Т. 29. N 2. С. 315–338.
5. Cao Y., Jiang D., Wang D. Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings. *International Journal of Algebra and Computation*, 2007. Vol.17. N 3.
6. Литаврин А.В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле классических типов. дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.06. СФУ. 2017. 74 с.
7. Левчук В.М., Литаврин А.В. Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле [Электронный ресурс]. *Сибирские электронные математические известия*, 2016. Т. 13. С. 467–477. DOI: 10.17377/semi.2016.13.040. URL: <http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf>
8. Carter R. *Simple Groups of Lie Type*. New York: Wiley and Sons, 1972. 331p.
9. Левчук В.М., Литаврин А.В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле ортогональных типов. *Вестник СибГАУ*, 2016. Т. 323, № 2. С. 324–328.
10. Kuzucuoglu F., Levchuk V.M. The automorphism group of certain radical rings. *Journal of Algebra*, 2001. Vol. 243. Pp. 473–485.

Казакова Алена Викторовна, аспирантка, Сибирский федеральный университет, alvkazakova@gmail.com.

Численное решение прямой задачи переноса примеси

Е.А. Каратаева

*Институт оптики атмосферы СО РАН, Томск;
Национальный исследовательский Томский государственный
университет, Томск*

Аннотация. Численно решается трехмерная прямая задача распространения примеси от постоянного точечного источника подходом Эйлера и Лагранжа. Проверка полученных результатов осуществляется сравнением с точным решением. При подходе Эйлера численно решено уравнение переноса, учитывающее ветер, диффузию и интенсивность источника. Аппроксимация осуществлена с использованием противопотоковой схемы UPWIND, по формулам конечных разностей, центральных разностей, левых и средних прямоугольников. При подходе Лагранжа численно решено уравнение траектории для каждой частицы.

Ключевые слова: распространение примеси, численные методы, подход Эйлера, подход Лагранжа.

Промышленные выбросы имеют большое негативное влияние на экологию. Распространение выбросов в атмосфере происходит за счет их переноса воздушными массами и диффузии вследствие пульсаций воздуха.

Задача, когда по параметрам источника нужно определить направление дыма и концентрацию загрязняющих веществ, называется прямой задачей распространения примеси.

Для подхода Эйлера характерно уделение внимания области исследования, таким ее параметрам, как скорость ветра, температура, коэффициенты диффузии и иным. Частицы примеси являются единым облаком, распространяющимся по пространству. Решается уравнение адвекции-диффузии, получается концентрация примеси в области.

При подходе Лагранжа прослеживается жизненный цикл каждой отдельной частицы. Он начинается в момент попадания в область и заканчивается в момент покидания частицей области исследования. Характеристики среды также имеют значение, они

вливают на характер движения частицы, определяя ее траекторию. По траектории частиц выносятся суждения о концентрации.

Эйлеров подход распространения примеси

По заданным параметрам положения в пространстве и интенсивности источника требуется найти концентрацию распространившейся из него примеси. В качестве источника рассматривается труба некоторой высоты (рис. 1).

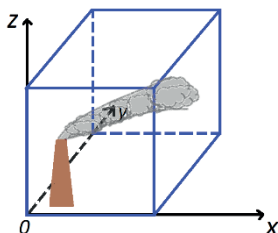


Рис. 1. Источник и область распространения примеси

Источник располагается внутри некоторого объема пространства $[0, L_x][0, L_y][0, L_z][0, L_x][0, L_y][0, L_z]$.

Адвективно-диффузионное уравнение, моделирующее перенос газообразной примеси в заданном потоке, представляется в следующем виде [1]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} + W \frac{\partial C}{\partial z} + \sigma C = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma^x \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma^y \frac{\partial C}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right] + Q. (1)$$

где

$[C] = \text{кг/м}^3$ – концентрация примеси. C зависит от x, y, z, t ;

x, y, z – координаты в правой системе координат;

t – время;

U, V, W – компоненты вектора скорости в направлении x, y, z соответственно;

$[\sigma] = \text{с}^{-1}$ – интенсивность влажного осаждения (вымывания осадками);

$[\Gamma^x] = [\Gamma^y] = \text{м}^2/\text{с}$, $[K_z] = \text{м}^2/\text{с}$ – горизонтальные и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии;

$[Q] = \text{кг/м}^3$ – интенсивность источника. От вида функции Q зависит вид источника: постоянный или мгновенный.

Начальные и граничные условия

В начальный момент времени примеси в области нет:

$$t = 0, C = 0$$

$$x = 0, y = 0: C = 0; z = 0: \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$x = Lx, y = Ly, z = Lz: \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

Упрощения

Задача решается в условиях отсутствия осадков, поэтому коэффициент интенсивности влажного осаждения принимаем равным нулю: $\sigma = 0$. Вертикальная компонента ветра принимается равной нулю, поскольку считается, что ветер распространяется только горизонтально.

Численная схема

Решаем задачу методом конечных объемов. Область непрерывного изменения аргументов $x \in [0, Lx]$, $y \in [0, Ly]$ и $z \in [0, Lz]$ заменим сеточной. Делим интервалы Lx, Ly и Lz на Nx, Ny и Nz равных частей соответственно. Середина каждого интервала – это координата точки, в которой вычисляется значение концентрации. Получаем область-параллелепипед, состоящий из $Nx \times Ny \times Nz$ шт. параллелепипедов равного объема (рис. 2). Каждому параллелепипеду присваивается значение концентрации в его центральной точке.

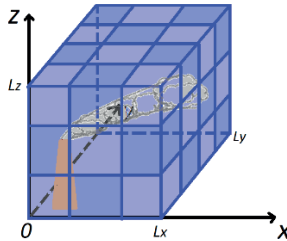


Рис. 2. Разбиение области на подобласти

Дискретизация по времени имеет вид $t_0 \leq it \leq T$, где t_0 – начальное время расчетов, T – конечное время расчетов, $\tau = T/Nt$ – шаг по времени, Nt – количество разбиений временного интервала, $i = \overline{0, Nt}$.

Для решения задачи требуется проинтегрировать каждый член уравнения по времени и пространству (в каждом маленьком параллелепипеде).

Нестационарный член аппроксимируем по формуле конечных разностей, адвективные члены – с помощью противопотоковой схемы UPWIND, диффузионные члены по формуле центральных разностей. Кроме этого, используем формулы левых и средних прямоугольников.

Поскольку источник постоянный, слагаемое для него добавляется на каждом временном шаге, но только в том параллелепипеде, в который попадает верхушка источника.

Полученная разностная схема

Выражение для каждого следующего шага по времени:

$$\begin{aligned}
 C_{ijk}^{n+1} = & C_{ijk}^n - \frac{\tau C_{ijk}^n}{h_x h_y h_z} [(\max(U_e, 0) + \max(-U_w, 0))h_y h_z + \\
 & (\max(V_n, 0) + \max(-V_s, 0))h_x h_z + (\max(W_t, 0) + \\
 & \max(-W_b, 0))h_x h_y] + \frac{\tau \max(-U_e, 0) C_{i+1jk}^n}{h_x} + \frac{\tau \max(U_w, 0) C_{i-1jk}^n}{h_x} + \\
 & \frac{\tau \max(-V_n, 0) C_{ij+1k}^n}{h_y} + \frac{\tau \max(V_s, 0) C_{ij-1k}^n}{h_y} + \frac{\tau \max(-W_t, 0) C_{ijk+1}^n}{h_z} + \\
 & \frac{\tau \max(W_b, 0) C_{ijk-1}^n}{h_z} + \frac{\Gamma^x}{h_x^2} [C_{i+1jk}^n - 2C_{ijk}^n + C_{i-1jk}^n] \tau + \frac{\Gamma^y}{h_y^2} [C_{ij+1k}^n - \\
 & 2C_{ijk}^n + C_{ij-1k}^n] \tau + \frac{K_z}{h_z^2} [C_{ijk+1}^n - 2C_{ijk}^n + C_{ijk-1}^n] \tau + Q_{ijk}^n h_x h_y h_z \tau
 \end{aligned}$$

Порядок аппроксимации, устойчивость, сходимости, схемная вязкость

Разложение в ряд Тейлора полученной схемы позволяет получить первый порядок аппроксимации по времени и пространству.

Условия для контроля схемной вязкости:

$$\Gamma^x \gg U \frac{h}{2}, \Gamma^y \gg V \frac{h}{2}, K_z \gg W \frac{h}{2} \quad (3)$$

Устойчивость схемы исследована методом гармоник. Условия устойчивости:

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{h}U + 2\Gamma^x \frac{\tau}{h^2} &\leq 1 \\ \frac{\tau}{h}V + 2\Gamma^y \frac{\tau}{h^2} &\leq 1 \\ \frac{\tau}{h}W + 2K_z \frac{\tau}{h^2} &\leq 1\end{aligned}\quad (4)$$

Сходимость разностной задачи к дифференциальной имеет место по теореме Лакса [2].

Точное решение

Точное решение для трехмерной задачи переноса примеси с точечным постоянным источником, находящимся на высоте h над поверхностью земли, имеет вид [3]:

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi Kx} \exp\left\{\frac{-uy^2}{4Kx}\right\} \left\{ \exp\left[-\frac{u(z-h)^2}{4Kx}\right] + \exp\left[-\frac{u(z+h)^2}{4Kx}\right] \right\}, \quad (5)$$

где ось x направлена по направлению ветра;

K – коэффициент диффузии;

u – скорость ветра.

Программная реализация

Параметры решаемой задачи: $\Gamma^x = \Gamma^y = 2 \text{ м}^2/\text{с}$, $K_z = 1 \text{ м}^2/\text{с}$; скорость ветра 2 м/с , ветер юго-западный, мощность источника 1000 кг/с , расположение – в первой координатной плоскости, на высоте, примерно равной половине высоты исследуемого объема воздуха.

Для использования формулы точного решения были произведены преобразования координат по формулам

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' = y \cos \varphi - x \sin \varphi \end{cases} \quad (6)$$

где φ – угол поворота координатной оси.

Смещенность источника относительно начала координат была учтена.

Результаты для области $[-10,10] \times [-10,10] \times [0,10]$ метров с шагом 1 м по каждой оси, при выбросе, осуществлявшемся в течение 5 секунд с шагом 0,01 с, представлены на рис. 3. Источник расположен в точке $[0,1; 0,1; 5,1]$. Из-за невозможности корректного отображения трехмерных результатов, концентрации в области были осреднены по столбцам на плоскость xOy .

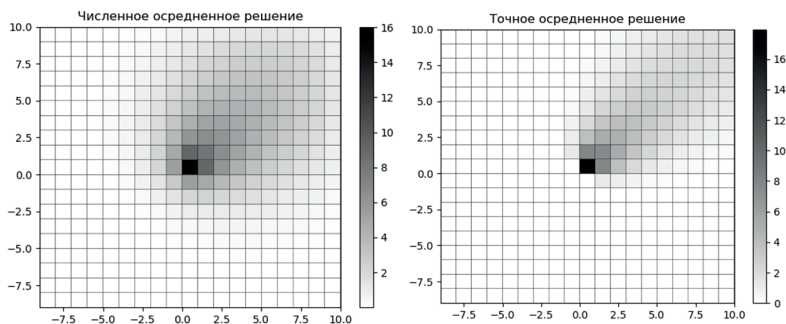


Рис. 3. Осредненные по столбу численное и точное решения

Чтобы посмотреть на различия в решении, построим аналогичный график для модуля разности между средним значением точного и численного решения (рис. 4).

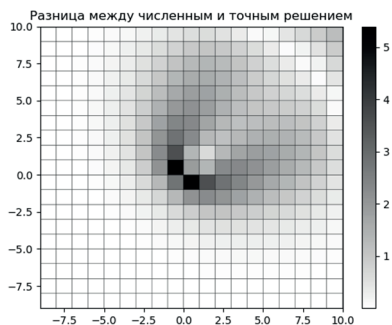


Рис. 4. Разница между осредненными численным и точным решениями

Численное решение достаточно хорошо приближает точное. Наибольшее отклонение наблюдается в областях

наименее вероятного рассеивания примеси – с западной стороны источника и южной. В этих частях пространства примесь не наблюдается при точном решении. Численное решение отражает ситуацию, при которой примесь вокруг источника успевает распространиться, прежде чем ее снесет ветром в противоположную сторону. Наименьшее отклонение от точного решения наблюдается в зоне оси факела (области наивысшей концентрации примеси). Разница в полученном решении наблюдается из-за первого порядка точности схемы.

Лагранжев подход распространения примеси

При лагранжевом подходе к решению задачи распространения примеси фокус внимания смещается с области пространства в целом на частицу.

Формула траектории движения имеет вид [4]:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + v(X, t)\Delta t . \quad (7)$$

Уравнение для полной скорости частицы в направлении i :

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i . \quad (8)$$

Предполагается, что временной масштаб меньше, чем время осреднения, примерно равное одному часу. В этом случае диффузия оценивается следующим образом. Турбулентные пульсации имеют коррелированную и случайную составляющие:

$$v'_i(t + \Delta t) = v'_i(t)\rho_L^i(\Delta t) + \rho_i , \quad (9)$$

где Δt – шаг по времени, $\rho_L^i(\Delta t)$ – лагранжев коэффициент автокорреляции для i -й компоненты скорости и временного шага Δt . Случайная составляющая должна иметь нормальное распределение с нулевым средним и стандартным отклонением

$$\sigma_{\rho_i} = \sigma_i \left(1 - \left(\rho_L^i(\Delta t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \sigma_i = \left(\overline{v_i'^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (10)$$

Это условие обеспечивает сохранение энергии турбулентности от шага к шагу.

Часто принимается $\rho_L^i(\Delta t) = \exp(-\Delta t/T_L^i)$.

Предполагается, что движение частицы в каждый момент времени определяется флуктуациями скорости со значениями σ_i и ρ_L^i в точке нахождения частицы.

Параметры T_L^i зависят от стратификации атмосферы и рассчитываются в соответствии с ней. Характер стратификации задается числом Обухова. Подробнее об этом в работе [4].

Численная схема

Каждая частица несет в себе $\frac{Q}{Np}$ кг примеси, где Np – количество запускаемых частиц. Сеточная область задается аналогично подходу Эйлера. В начальный момент времени частица находится в точке источника.

Задается некоторый шаг по времени τ , через который мы определяем положение частицы в пространстве. Положение – это ячейка пространства, в которой находится частица. Если частица попала в ячейку, мы добавляем к предыдущему значению концентрации в этой ячейке то, которое принесла частица, но при этом умножаем его на время, проведенное в ячейке τ . Это обеспечивает согласование единиц измерения.

Точное решение

В качестве точного решения возьмем гауссову модель факела, используемую в большинстве практических приложений диффузии [4]:

$$C = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right\} \left[\exp\left\{-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right\} \right], \quad (11)$$

где

$[C] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – концентрация примеси. C зависит от x, y, z, t ;

$[Q] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ – мощность непрерывного точечного источника;

u – скорость ветра;

H – высота источника;

y – расстояние в поперечном направлении от оси факела (линии наибольшей концентрации примеси);

z – высота над уровнем земли;

σ_y, σ_z – эмпирические диффузионные параметры, зависящие от атмосферной устойчивости и расстояния до источника.

Расчетные формулы для диффузионных параметров можно найти в [4].

Программная реализация

Для области 2000 x 2000 x 500 метров решим задачу численно и точно. Источник находится в точке $[0, 0, 20]$. Получены графики (рис. 5):

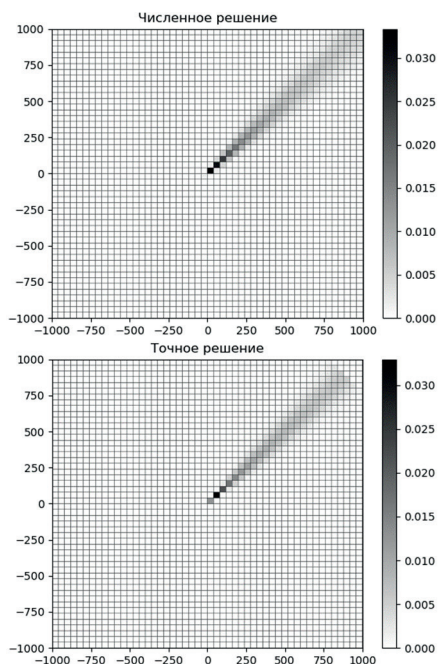


Рис. 5. Осредненные точное и численное решения

График разницы получаем аналогично, взяв модуль разности полученных значений (рис. 6):

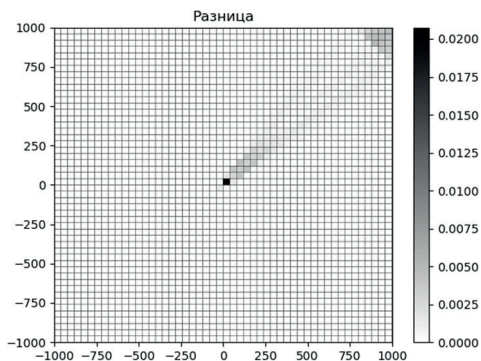


Рис. 6. Разница между осредненными точным и численным решениями

Наибольшая разница обнаруживается в квадрате источника. Это вызвано тем, что математически в зоне источника по формуле точного решения должно получаться бесконечное значение концентрации, поскольку в этом случае σ_y, σ_z обращаются в нуль. Однако физически значение в этой точке не может быть равно бесконечности, и разделить на нуль нельзя. Поэтому для куба, содержащего источник, значение концентрации вычисляется по тем же формулам, что и для остальных, с тем условием, что ни один элемент формулы точного решения (σ_y, σ_z , разность координат, расстояние до точки измерения) не обращается в нуль. Это можно сделать, если не допускать попадания точки источника точно в середину единичного объема.

Во всех остальных точках плоскости численное решение достаточно хорошо приближает точное.

Заключение

Двумя методами решена трехмерная прямая задача распространения примеси, получены численные результаты, представленные на графиках. Полученные для решения программы на языке программирования C++ могут быть применены (с соответствующими модификациями) для дальнейшего решения усложненных версий задач и распараллеливания с целью решения на многопроцессорных вычислительных комплексах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М. : Наука, 1982.*
2. *Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений: учебное пособие. Томск : Изд. дом ТГУ, 2014.*
3. *Сеттон О. Г. Микрометеорология. Л. : Гидромет. изд., 1958.*
4. *Ньистадт Ф.Т.М., Ван Дон Х. Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей Л.: Гидрометеоиздат, 1985.*

Каратаева Екатерина Алексеевна, магистр математики, инженер ИОА СО РАН,
nebosolnze@gmail.com.

Моделирование зажигания строительных материалов частицами, нагретыми до высокой температуры

Д.П. Касымов, Е.Н. Голубничий,
В.В. Перминов, А.С. Якимов

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. Выполнено численное моделирование зажигания уголка строительного материала набором «горячих» частиц. Задача рассматривается в декартовых координатах в трехмерной постановке. Найдено, что зажигание исходного реагента определяется процессами теплообмена с очагом пожара, сушки, пиролиза сухой древесины, реакциями окисления оксида углерода, метана. Установлены зависимости времени задержки зажигания строительного материала от начальных температур реагента и количества «горячих» частиц, при которых реализуются условия зажигания. Приводится качественное сравнение результатов расчета с известными данными.

Ключевые слова: строительный материал, нагретые частицы, пиролиз, сопряженный теплообмен, зажигание.

Введение. Лесные и городские пожары приводят к большим материальным потерям, превращая в дым и пепел жилые и промышленные здания. Довольно часто огонь от вторичных источников зажигания (нагретых до высокой температуры частиц неметаллов или металлов [1]) перебрасывается на деревянные строения в городах и поселках [2]. Факторами, влияющими на воспламенение строительных материалов (СМ), может быть кондуктивный перенос тепла от нагретых частиц, которые часто накапливаются на крыше и в углах зданий, заборах или иным способом попадают внутрь помещений и приводят к их воспламенению. Многие исследования показали, что тлеющие и горящие частицы играют ведущую роль как в распространении огня, так и в воспламенении конструкций [3, 4].

Согласно [5, 6] древесина представляет собой пористую реакционноспособную среду, физико-химические свойства которой изменяются при нагревании и горении. Поэтому для математического моделирования процессов зажигания и горения древесины целесообразно использовать модели реагирующих сред, представленные в работах [7–9].

Цель исследования – создание физико-математической модели в трехмерной постановке зажигания СМ из древесины. Моделируется случай, когда «нагретые» частицы (от 5 до 10 частиц в эксперименте), образованные во время пожара, могут скапливаться в углах зданий, на крышах, жилых помещений и приводить к их воспламенению.

Постановка задачи. Будем считать, что зажигание и горение уголка СМ возникает от кондуктивного взаимодействия с «нагретыми» инертными металлическими частицами (см. рис. 1).

Рассмотрим пространственную задачу в параллелепипеде: нижняя доска-1 (область 1), на которой располагается доска-2 (область 2 на заднем плане рис. 1), с расположенными частицами на первой доске и плотно (без зазора) примыкающими к доске-2. В общем случае теплофизические свойства доски-1 и доски-2 могут различаться. Ось x_3 направлена вертикально вверх, начало координат находится на нижней стороне области 1. Ось x_2 направлена от внешней стороны области 2 как на рис. 1, а ось x_1 расположена слева направо.

Для упрощения анализа, следуя [9, 10, 11], будем предполагать, что: 1) древесина является двухтемпературной горючей недеформируемой пористой средой, состоящей из следующих фаз: $\phi_1^{(i)}$, $i = 1, 2$ – сухого органического вещества (сухая древесина состоит из лигнина, целлюлозы и гемицеллюлозы [5, 6, 11]), $\phi_2^{(i)}$, $i = 1, 2$ – гигроскопической воды, связанной с этим органическим веществом в порах [5, 6, 11], $\phi_3^{(i)}$, $i = 1, 2$ – коксика (продукта пиролиза органического вещества), а также конденсированного и газообразного продуктов горения

(объемные доли $\phi_4^{(i)}$ и $\phi_5^{(i)}$, $i = 1, 2$); 2) газовая фаза в слое древесины состоит из семи компонентов: CO , H_2O , O_2 , CO_2 , t_* , H_2 и N_2 , массовые концентрации которых $c_j^{(i)}$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, n_1$ соответственно; 3) в самом слое древесины имеет место испарение связанной воды и учитывается процесс фильтрации. Далее везде – верхний индекс (1) обозначает область 1, а индекс (2) – область 2.

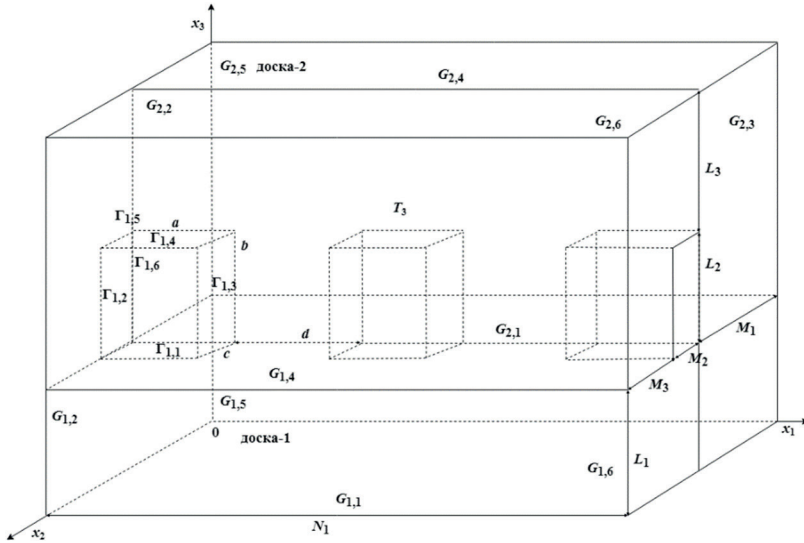


Рис. 1. Схема теплообмена уголка СМ с «нагретыми» частицами

Математически сформулированная выше задача с учетом сделанных допущений сводится к решению следующей системы уравнений [9, 10, 11]:

$$\frac{\partial \rho_5^{(i)} \phi_5^{(i)}}{\partial t} + \text{div}(\rho_5^{(i)} \phi_5^{(i)} \vec{W}_i) = Z_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\text{grad } P_i = -\frac{H_i}{\xi_i} \vec{W}_i - \rho_5^{(i)} \vec{g}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^4 c_{P_j}^{(i)} \rho_j^{(i)} \phi_j^{(i)} \frac{\partial T_1^{(i)}}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{ks}^{(i)} \frac{\partial T_1^{(i)}}{\partial x_k} \right) + (3)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^4 Q_{js}^{(i)} R_{js}^{(i)} + A_v(T_2^{(i)} - T_1^{(i)}), \quad i = 1, 2, \\
& \rho_5^{(i)} \phi_5^{(i)} c_{p5}^{(i)} \frac{dT_2^{(i)}}{dt} = \operatorname{div}(\lambda_5^{(i)} \phi_5^{(i)} \operatorname{grad} T_2^{(i)}) + \quad (4) \\
& + \rho_5^{(i)} \phi_5^{(i)} \operatorname{grad} T_2^{(i)} \sum_{j=1}^{n_1} c_{pj}^{(i)} D_j^{(i)} \operatorname{grad} c_j^{(i)} + \\
& + \sum_{j=1}^3 q_j^{(i)} r_j^{(i)} + c_{p1}^{(i)} (T_1^{(i)} - T_2^{(i)}) (1 - \alpha_c) R_{1s}^{(i)} - \\
& - A_v(T_2^{(i)} - T_1^{(i)}) + c_{p2}^{(i)} (T_1^{(i)} - T_2^{(i)}) R_{2s}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \\
& \rho_5^{(i)} \phi_5^{(i)} \frac{dc_j^{(i)}}{dt} = \operatorname{div}(\rho_5^{(i)} \phi_5^{(i)} D_j^{(i)} \operatorname{grad} c_j^{(i)}) - \quad (5) \\
& - c_j^{(i)} Z_i + R_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, n_1 - 1, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Уравнение теплопроводности для нагретых частиц

$$\rho_3 c_{p3} \frac{\partial T_{3,k}}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_3 \operatorname{grad} T_{3,k}), \quad k = 1, \dots, n_2 \quad (6)$$

Замыкающие переменные соотношения для уравнений (1) – (5) имеют вид

$$\rho_1^{(i)} \frac{\partial \phi_1^{(i)}}{\partial t} = -R_{1s}^{(i)}, \quad \rho_2^{(i)} \frac{\partial \phi_2^{(i)}}{\partial t} = -R_{2s}^{(i)}, \quad (7)$$

$$\rho_3^{(i)} \frac{\partial \phi_3^{(i)}}{\partial t} = \alpha_c R_{1s}^{(i)} - R_{3s}^{(i)} (1 + \alpha_4), \quad \rho_4^{(i)} \frac{\partial \phi_4^{(i)}}{\partial t} = R_{4s}^{(i)},$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j^{(i)} = 1, \quad \phi_5^{(i)} = 1 - \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)}, \quad Y_i^{-1} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{c_j^{(i)}}{m_j}, \quad (8)$$

$$P_i = \frac{\rho_5^{(i)} R T_2^{(i)}}{Y_i},$$

Начальные условия для системы (1) – (7)

$$T_1^{(i)} = T_0, T_2^{(i)} = T_0, T_3 = T_{3*}, c_j^{(i)} = c_{j,0}, \quad (9)$$

$i = 1, 2, j = 1, \dots, n_1 - 1, \phi_j^{(i)} = \phi_{j,0}^{(i)}, j = 1, \dots, 4, i = 1, 2$ при $t = 0$.

Граничные условия.

Условие идеального контакта и равенства температур между двумя досками областей 1–2

$$\begin{aligned} \phi_3^{(1)} \lambda_5^{(1)} \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial x_3} \Big|_{G_{2,1}} &= \phi_3^{(2)} \lambda_5^{(2)} \frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial x_3} \Big|_{G_{2,1}}, \quad (10) \\ T_2^{(1)} \Big|_{G_{2,1}} &= T_2^{(2)} \Big|_{G_{2,1}}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

условия сопряжения между доской-1 и частицами при $0 \leq x_1 \leq a$, кроме промежутков между частицами $a < x_1 \leq d + a$ на всей длине доски-1 ($0 \leq x_1 \leq N_1, M_1 \leq x_2 \leq M_1 + c$)

$$\begin{aligned} \phi_3^{(1)} \lambda_5^{(1)} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial x_3} \Big|_{G_{1,4}} &= \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \Big|_{G_{1,4}}, \quad T_1^{(1)} \Big|_{G_{1,4}} = T_3 \Big|_{G_{1,4}}, \\ T_1^{(1)} \Big|_{G_{1,4}} &= T_2^{(1)} \Big|_{G_{1,4}} \quad (11) \end{aligned}$$

условия сопряжения между доской-2 и частицами при $0 \leq x_1 \leq a$, кроме промежутков между частицами $a < x_1 \leq d + a$ на всей длине доски-2 ($0 \leq x_1 \leq N_1, L_1 \leq x_3 \leq L_1 + b$)

$$\begin{aligned} \phi_3^{(2)} \lambda_5^{(2)} \frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial x_2} \Big|_{G_{2,6}} &= \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x_2} \Big|_{G_{2,6}}, \quad T_1^{(2)} \Big|_{G_{2,6}} = T_3 \Big|_{G_{2,6}}, \\ T_1^{(2)} \Big|_{G_{2,6}} &= T_2^{(2)} \Big|_{G_{2,6}} \quad (12) \end{aligned}$$

условие идеального контакта для диффузионных потоков и равенства концентраций компонент между областями 1–2

$$\begin{aligned} \phi_5^{(1)} \rho_5^{(1)} D_j^{(1)} \frac{\partial c_j^{(1)}}{\partial x_3} \Big|_{G_{2,1}} &= \phi_5^{(2)} \rho_5^{(2)} D_j^{(2)} \frac{\partial c_j^{(2)}}{\partial x_3} \Big|_{G_{2,1}}, \\ c_j^{(1)} \Big|_{G_{2,1}} &= c_j^{(2)} \Big|_{G_{2,1}} \end{aligned} \quad (13)$$

условие отсутствия выгорания концентраций компонент на внешних гранях уголков древесины из областей 1–2: $G_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = 1–6$ и на гранях частиц: $\Gamma_{1,1}$, $\Gamma_{1,5}$

$$\frac{\partial c_j^{(i)}}{\partial x_k} \Big|_{G_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad l = 1, \dots, 6, \quad k = 1, 2, 3, \quad (14)$$

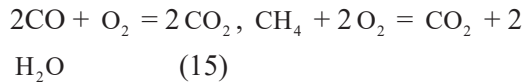
$$\frac{\partial c_j^{(1)}}{\partial x_3} \Big|_{\Gamma_{1,1}} = 0, \quad j = 1, \dots, n_1 - 1, \quad \frac{\partial c_j^{(1)}}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_{1,5}} = 0, \quad j = 1, \dots, n_1 - 1,$$

условие тепловой изоляции для доски-1 по всем внешним границам области 1: $G_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = 1–6$, кроме областей, где доска-1 контактирует с доской-2 и частицами;

условие тепловой изоляции для доски-2 по всем внешним границам области 2: $G_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = 1–6$, кроме областей, где доска-2 контактирует с доской-1 и частицами;

условие тепловой изоляции для частиц по всем внешним граням, кроме областей, где частицы контактируют с областями 1–2.

Реакции в конденсированной фазе. Известно [5, 12], что итоговыми гомогенными химическими реакциями в проницаемом слое древесины являются:



Теплофизические коэффициенты воздуха, значения массовых концентраций компонент при начальной температуре, молекулярные веса концентраций компонент, теплофизические, термокинетические коэффициенты древесины, тепловые эффекты реакций (16) приведены в табл. 3–4 [9].

Результаты численного решения и их анализ. Временем зажигания (t_*) уголка СМ «нагретыми» частицами назовем величину температуры реагента (досок-1, -2), когда она резко возрастает до $T_m = 1200$ К ($T_m = \max T_j^{(i)}, i, j = 1, 2$) [9]. На рис. 2 дано распределение температуры доски-2 в сечении $S_{2*} = \{x_1 = 2a + 1.1d, x_3 = L_1 + 0.99 \times L_2\}$ (см. рис. 1) по поперечной переменной x_2 в различные моменты времени: 10 (1), 20 (2), 22,67 (3) с при начальной температуре частиц ($T_{3*} = 720$ К). Сплошные кривые отвечают температуре газовой фазы ($T_2^{(2)}$), штриховые кривые – температуре каркаса древесины ($T_1^{(2)}$).

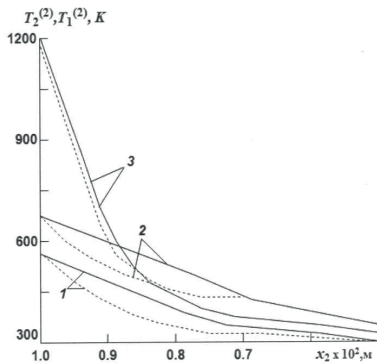


Рис. 2. Зависимость температуры газовой фазы $T_2^{(2)}$ (сплошные кривые) и каркаса $T_1^{(2)}$ (штриховые кривые) доски-2 от поперечной переменной x_2 в сечении S_{2*} в различные моменты времени: 1 – 10 с, 2 – 20, 3 – 22,27 ($T_{3*} = 720$ К)

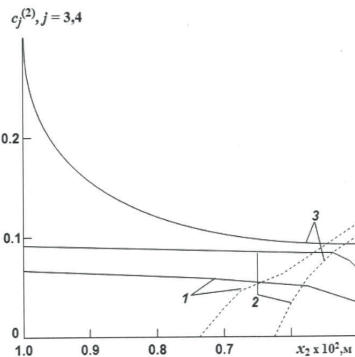


Рис. 3. Зависимость безразмерной концентрации компоненты двуоксида углерода $c_4^{(2)}$ доски-2 (сплошные кривые) и кислорода $c_3^{(2)}$ (штриховые кривые) от координаты x_2 в сечении S_{2*} в те же самые моменты времени, что и на рис. 2

На рис. 3 представлены поля концентраций компонента двуокиси углерода и кислорода в проницаемом реагенте (доска-2) по координате x_2 , в сечении S_{2^*} . Сплошные кривые отвечают $c_4^{(2)}$, штриховые кривые – $c_3^{(2)}$ в те же моменты времени, что и на рис. 2.

Из анализа рис. 2–3 следует, что по мере прогрева уголка СМ «горячими» частицами увеличивается температура внутри реагентов и в сечении S_{2^*} (вблизи областей 2–3 частиц) наблюдается резкий рост температуры газовой фазы ($T_2^{(2)}$) при $t = t_*$. Режиму зажигания отвечают кривые, имеющие максимум T_m .

Как видно из рис. 2–3, имеет место резкий рост концентрации углекислого газа в сечении S_{2^*} вблизи контакта с областями 2–3 частицами в результате тепловыделения $q_1 r_1^{(2)} + q_2 r_2^{(2)}$ от первой и второй реакции (16). Концентрация кислорода (O_2) начинает падать при $T_2^{(i)} > 550$ К, $i = 1, 2$ ($c_3^{(i)} < 0.21$, $i = 1, 2$). При $T_2^{(i)} > 700$ К, $i = 1, 2$ величина O_2 продолжает уменьшаться: $c_3^{(i)} < 0.18$, $i = 1, 2$ и к моменту зажигания $t = t_*$ стремится к нулю.

Представляют интерес результаты зажигания уголка СМ при увеличении начальной температуры T_0 и уменьшении температуры частиц T_{3^*} . Оказалось, что время зажигания уголка СМ, предварительно нагретого до температуры 373 К, уменьшилось до $t_* = 18.04$ с. Однако при уменьшении $T_{3^*} = 710$ К время зажигания уголка СМ увеличилось до $t_* = 25,89$ с. Это связано с уменьшением запаса тепла «нагретых» частицах, что в итоге приводит к увеличению времени прогрева до момента воспламенения уголка СМ.

С увеличением объемной доли $\phi_{1,0}^{(i)}$, $i = 1, 2$ от 0,2, 0,307, 0,35 время зажигания уменьшается до $t_* = 23,31, 22,27, 21,18$ с

соответственно. Это связано с падением пористости реагента $\phi_{5,0} = 0,622, 0,515, 0,472$ и уменьшением доли азота $c_7^{(i)}, i = 1, 2$ в древесине. Так как азот имеет низкую теплопроводность при отмеченных невысоких температурах, поэтому и теплопроводность уголка СМ уменьшается, что препятствует его прогреву и воспламенению.

При уменьшении числа «горячих» частиц до пяти, увеличении расстояния между ними в 3,6 раза ($d = 1,8 \times 10^{-2}$ м) или росте длины $a = 0,01$ м (см. рис. 1) для прочих одинаковых входных данных не происходит зажигания уголка СМ. Это связано с понижением со временем температуры частиц при меньшем количестве «горячих» частиц из-за уменьшения запаса тепла, необходимого для воспламенения. Этот результат качественно находится в согласии с данными эксперимента [13].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00068.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Г.В., Барановский Н.В. Прогноз возникновения лесных пожаров и их экологических последствий. Новосибирск : Изд-во СО РАН. 2009.
2. Шойгу С.К., Копылов Н.П., Баратов А.Н. и др. Пожарная безопасность. Энциклопедия, МЧС России. М. : ФГУ ВНИИ ПО МЧС России. ЗАО «Голден-Би», 2007.
3. Manzello S.L., Suzuki S., Gollner M.J. et al. Role of Firebrand Combustion in Large Outdoor Fire Spread // *Progress in energy and combustion science*. 2020. Vol. 76. P. 1–19.
4. Caton S.E., Hakes R.S.P., Gorham D.J. et al. Review of Pathways for Building Fire Spread in the Wildland Urban Interface Part I: Exposure Conditions // *Fire Technology*. 2017. Vol. 53. P. 429–473.
5. Харук Е.В. Проницаемость древесины газами и жидкостями. Новосибирск: Наука, 1976.
6. Уголев Б.Н. Древесиноведение с основами лесного товароведения. М. : Лесная промышленность, 1986.
7. Гришин А.М. Обищие математические модели лесных и торфяных пожаров и их приложения // *Успехи механики*. 2002. Т. 1. № 4. С. 41–89.

8. Е.Л. Лобода, А.С. Якимов. *Некоторые результаты математического моделирования процесса зажигания торфа // ТВТ. 2013. Т. 51. № 6. 923–930.*
9. Гришин А.М., Якимов А.С. *Математическое моделирование процесса зажигания древесины. Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 4. С. 473–486.*
10. Гришин А.М. *Общая физико-математическая модель зажигания и горения древесины // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2010. № 2(10). С. 60–70.*
11. Гришин А.М. *Математические модели лесных пожаров. Томск : Изд-во Томск. ун-та, 1981.*
12. Щетинков Е.С. *Физика горения газов. М.: Наука, 1965.*
13. Kasymov D.P., Agafontsev M.V., Martynov P.A. et. el. *Studying firebrands interaction with flat surface of various wood construction materials in laboratory conditions // Journal of Physics Conference Series. 2019. No. 1359 (012092). doi:10.1088/1742-6596/1359/1/012092.*

Касымов Денис Петрович, к. ф.-м. н., доцент, доцент, ТГУ,
denkasymov@gmail.com.

Голубничий Егор Николаевич, магистрант, ТГУ, golubnichii_egor@gmail.com.

Перминов Владислав Валерьевич, аспирант, ТГУ, ya.vladperminov2013@yandex.ru.

Якимов Анатолий Степанович, д. т. н., доцент, профессор, ТГУ,
yakimovas@mail.ru.

Определение статистически значимых факторов возникновения сердечно-сосудистых заболеваний

С.Б. Кологривова, Е.А. Пчелинцев

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. В данной работе осуществляется исследование набора данных, содержащего различные факторы возникновения сердечно-сосудистых заболеваний. Анализ данных реализуется на основе языка Python. Проводится анализ корреляций для определения наиболее значимых факторов, также строится модель логистической регрессии и оценивается инструментами ROC-анализа.

Ключевые слова: сердечно-сосудистые заболевания, факторы риска, логистическая регрессия, ROC-анализ.

Введение. Сердечно-сосудистые заболевания являются актуальной проблемой, поскольку не только приводят к потере работоспособности, а также к демографическому и экономическому ущербу. Поэтому остро встает вопрос выявления факторов возникновения ССЗ для будущего предотвращения развития серьезной патологии.

С точки зрения медицины, этот вопрос достаточно хорошо изучен [4]. На данный момент активно развивается медицинская статистика, так как ее инструментами можно построить математические модели и получить необходимые для исследования закономерности и результаты наиболее объективно.

Цель данной работы: определить факторы возникновения сердечно-сосудистых заболеваний методами математической статистики с использованием Python.

Набор данных. В работе используются данные о клинических испытаниях, взятые из открытого источника [5]. Набор данных сформирован на основе обследования 70 000

пациентов. Он содержит различные факторы риска. Фрагмент таблицы представлен на рисунке 1.

	id	age	gender	height	weight	ap_hi	ap_lo	cholesterol	gluc	smoke	alco	active	cardio
0	0	18393	2	168	62.0	110	80	1	1	0	0	1	0
1	1	20228	1	156	85.0	140	90	3	1	0	0	1	1
2	2	18857	1	165	64.0	130	70	3	1	0	0	0	1
3	3	17623	2	169	82.0	150	100	1	1	0	0	1	1
4	4	17474	1	156	56.0	100	60	1	1	0	0	0	0

Рис. 1. Фрагмент набора данных

Предварительная обработка данных. Перед непосредственным построением статистической модели важно провести предварительную обработку данных. На этом этапе осуществляется очистка и организация исходных данных для повышения точности будущей модели.

Поскольку в любом исследовании не исключен человеческий фактор, необходимо проверить данные на пропущенные и недопустимые данные. В данном наборе данных не выявлено пропущенных данных. Обнаружены недопустимые значения. Например, встречается систолическое давление, которое выше диастолического или выше максимально допустимого значения. Эти данные были удалены из исходного набора. Выборка уменьшилась на 1 423 элемента.

Выявлены корреляции между данными. На рисунке 2 представлена тепловая карта корреляций. Тепловая карта является удобным инструментом для наглядной визуализации корреляций. Чем светлее оттенок ячейки, тем ближе коэффициент корреляции к 1.

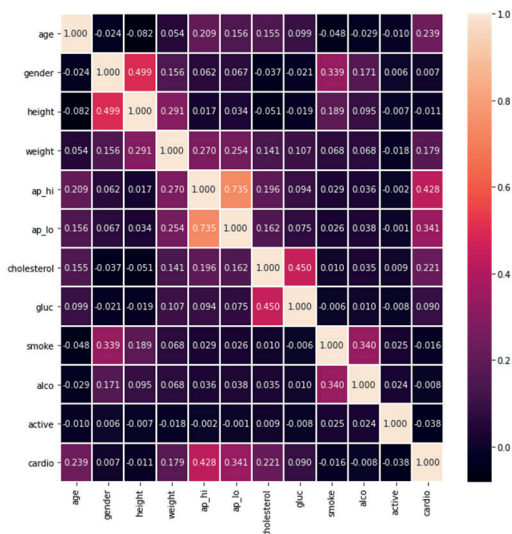


Рис. 2. Тепловая карта корреляций

На данном этапе уже можно сказать, что наибольшую корреляцию с наличием или отсутствием ССЗ имеют такие факторы, как возраст, систолическое и диастолическое давление, уровень холестерина. Выявленные факторы являются наиболее значимыми.

Математическое описание модели регрессии. Согласно [1] модель регрессии представляет собой статистическую зависимость математического ожидания случайной величины от других случайных величин $E(Y | x) = g(x)$, где $g(x)$ – измеримая функция.

Одной из задач регрессии является прогнозирование, а известно, что наилучшим прогнозом является условное математическое ожидание, поэтому вышеописанное уравнение регрессии является вполне обоснованным. Регрессия вида $Y = \alpha X + \xi$ называется линейной, коэффициенты α называются параметрами регрессии. Основной недостаток линейной регрессии состоит в том, что она может моделировать исключительно прямые линейные зависимости, когда на

практике может возникать необходимость в зависимостях другого рода.

Логистическая регрессия является дополнением классической линейной регрессии. Логистическая регрессия – математическая модель, которая используется для предсказания вероятности возникновения события, используя сравнение с логистической кривой. В случае бинарной логистической регрессии зависимая переменная является бинарной, то есть принимает два значения – 0 и 1. Данная модель устраняет основной недостаток линейной модели – требование у прямой линейной зависимости переменных.

Рассмотрим независимые переменные (регрессоры) x_1, \dots, x_p и $Y \in \{0, 1\}$. Вычислим условное математическое ожидание

$$E(y_i | x) = 0 \cdot P(y = 0 | x) + 1 \cdot P(y = 1 | x).$$

Далее предполагается, что вероятность определяется как $P(y = 1 | x) = g(y)$, то есть $E(y = 1 | x) = g(y)$, где

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad g(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}} \quad - \text{логит-функция.}$$

Для оценивания параметров данной модели используется метод максимального правдоподобия. Логарифмическая функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$\mathfrak{Z}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \{-\ln(1 + \exp(\alpha x_i)) + y_i x_i \alpha\}.$$

Теперь эту функцию максимизируют и получают необходимую оценку $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} \mathfrak{Z}(\alpha)$. Для получения такого решения в первую очередь функцию логарифмического правдоподобия дифференцируют и приравнивают результат к нулю: $\nabla \mathfrak{Z}(\alpha) = 0$. Данное трансцендентное уравнение неразрешимо аналитически. В большинстве математических пакетов используется метод Ньютона для численного решения.

После применения метода максимального правдоподобия получается оцененная модель $P(\hat{y} = 1 | x) = g(\hat{y}) = \frac{1}{1 + e^{\hat{y}}}$, где

$$\hat{y} = 0.051x_1 - 0.019x_2 - 0.004x_3 + 0.011x_4 + 0.056x_5 + 0.012x_6 + 0.499x_7 - 0.123x_8 - 0.142x_9 - 0.222x_{10} - 0.229x_{11}.$$

Анализ качества модели. Модель логистической регрессии строится на основе всех факторов, представленных в исходном наборе данных. Для работы используются алгоритмы машинного обучения. Исходный набор данных разделен на обучающий и тестовый наборы соответственно, причем это разделение выполняется математическим пакетом таким образом, чтобы каждый набор содержал данные обоих классов. Наиболее распространенное соотношение – 80 к 20, то есть 80 процентов исходных данных относятся к обучающему набору, остальные 20 – к тестовому. Сначала строится модель на основе обучающего набора, а потом осуществляется ее проверка на основе тестового набора с известными значениями для атрибута, для которого строится прогноз. Такой подход к работе с данными является распространенным, так как позволяет получить достаточно объективную оценку качества модели, то есть ее точность.

По результатам ее работы сделан вывод, что около 70 процентов пациентов имеют ССЗ (рисунок 3).

Полный отчет о классификации содержит самую обширную информацию о результатах работы модели. Все метрики, представленные на рисунке 3, определяются в терминах истинно и ложноположительных, истинно и ложноотрицательных значений.

	precision	recall	f1-score	support
0	0.7020	0.7631	0.7313	6913
1	0.7375	0.6727	0.7036	6841
accuracy			0.7181	13754
macro avg	0.7198	0.7179	0.7174	13754
weighted avg	0.7197	0.7181	0.7175	13754

Рис. 3. Полный отчет

После того как модель построена, необходимо оценить качество модели. Для получения большей информации о точности модели рассматривается матрица ошибок. Она содержит следующие значения: ложноположительные (FP),

истинно положительные (TP), ложноотрицательные (FN), истинно отрицательные (TN). Сумма TP и TN показывает количество правильных прогнозов, в случае данной программы – 9877. Ошибочные прогнозы рассчитываются аналогично, их 3877.



Рис. 4. Матрица ошибок

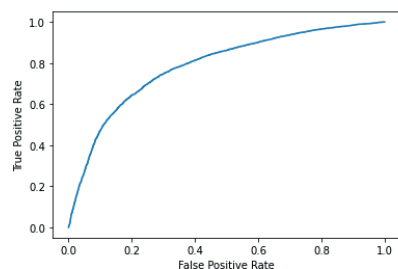
ROC-анализ. ROC-анализ используется для визуального представления оценки работы бинарной модели. Данный метод базируется на построении ROC-кривой, которая отражает зависимость двух величин – чувствительности и специфичности. Под специфичностью понимается число истинно отрицательных решений, те отношение $TPR = \frac{TP}{TP + FN}$. Чувствительность – это

число ложноположительных решений $FPR = \frac{TN}{FP + TN}$. В

идеальном случае кривая имеет чувствительность, близкую к единице, то есть проходит через левый край графика. Безусловно, в реальных условиях это практически невозможно, поэтому кривая с большим изгибом отражает более хороший классификатор.

AUC – значение площади под ROC-кривой. Данное значение является численным значением качества классификатора. Значение, которое ближе всего к единице,

отражает лучшую в модели. ROC-кривая и численное значение AUC представлены на рисунке, можно сделать вывод, что качество модели достаточно хорошее.



AUC: 0.787

Рис. 5. ROC-кривая и AUC

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А.А. *Математическая статистика* / А.А. Боровков. – Изд-во «Лань», 2010. – 704 с.
2. David W. Hosmer. *Applied Logistic Regression*/ David W. Hosmer, Stanley Lemeshow, Rodney X. Sturdivant. 2013. – 500 p.
3. *Logistic regression technique for prediction of cardiovascular disease* / Ambrish G. [others] // *Global transition proceeding.* – 2022. – № 3. – P. 127–130.
4. *The Framingham Heart Study and the epidemiology of cardiovascular disease: a historical perspective* / Syed SMahmoodMD [others] // *The Lancet.* – 2013. – P. 999–1008.
5. Исходная база данных. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/sulianova/cardiovascular-disease-dataset/code?datasetId=107706>.

Кологринова Софья Борисовна, бакалавр, Национальный исследовательский Томский государственный университет, skologrivova@gmail.com.

Пчелинцев Евгений Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, Национальный исследовательский Томский государственный университет, evgen-pch@yandex.ru.

Статистический анализ страхового рынка в РФ

Е.А. Кузнецова, Е.А. Пчелинцев

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск*

Аннотация. В работе проведен анализ современного состояния страхового рынка России, определены основные тенденции и динамика развития. На основе данных о количественных показателях страховых компаний подобраны наиболее подходящие законы распределения и построена модель Спарре Андерсена.

Ключевые слова: страхование, статистический анализ, проверка статистических гипотез, математическая модель страхования.

Проблема анализа оценки рисков и вероятности разорения страховой компании является одной из важнейших как для отдельной организации, так и для всего страхового бизнеса в целом [1].

Первичный статистический анализ

Основой исследования послужили данные о всех видах страхования, кроме ОМС, за период 2004–2021 гг. [2, 3]. В ходе первичного анализа выявлена тенденция к стремительному сокращению количества страховщиков. Если в 2004 году насчитывалось 1 016 организаций, то к концу 2021 года это число уменьшилось до 138.

Анализируя изменение объемов страховых премий и выплат (рис. 1), можно отметить увеличение обоих показателей. Замедление темпов роста в период 2009–2010 гг. обусловлено экономическим кризисом. Далее до 2019 года активно идет восстановление страхового рынка. В 2019 году страхование развивается медленно, зато по итогам 2021 года наблюдаются лучшие результаты за последние 9 лет.

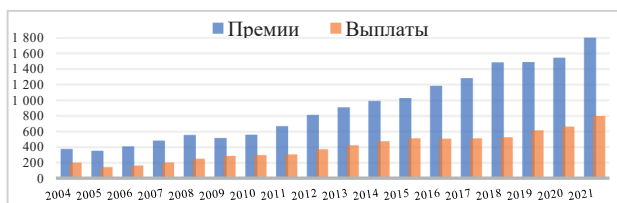


Рис. 1. Динамика страховых премий и выплат, млрд руб.

Оценивая данные о количестве договоров страхования (рис. 2), можно сделать вывод о снижении спроса потребителей в 2015 году и о его последующем увеличении. В 2020 году вновь наблюдается спад, обусловленный, по-видимому, пандемией. По итогам 2021 года отмечается колоссальный прирост числа заключенных договоров страхования.

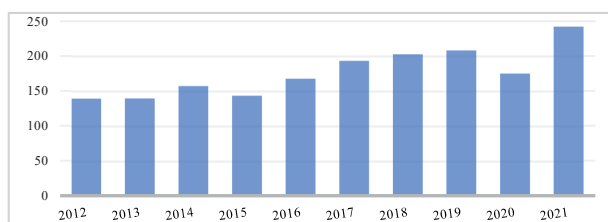


Рис. 2. Динамика количества договоров страхования, млн ед.

Несмотря на то, что временами рынок демонстрировал скачкообразную динамику, обусловленную влиянием различных факторов, все виды и отрасли страхования характеризуются увеличением объемов страховых показателей даже при уменьшении количества организаций. Даже после столь глобальной «чистки» страхового рынка ежегодно большая часть общего объема поступлений приходится на долю 20 ведущих компаний. Это позволяет говорить о неоднородности рынка.

Анализируя изменение средних (рис. 3) и медианных (рис. 4) значений по поступлениям и выплатам среди всех компаний, можно отметить положительную динамику развития. Существенные различия средних значений и медиан свидетельствуют о наличии выбросов в данных. На рынке

помимо компаний-гигантов имеется много мелких страховщиков, не вносящих вклад в развитие страховой отрасли.



Рис. 3. Динамика средних значений страховых премий и выплат, млн руб.

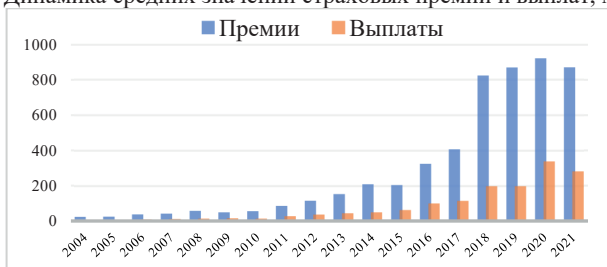


Рис. 4. Динамика медиан страховых премий и выплат, млн руб.

Тем не менее проведенный анализ демонстрирует благоприятную тенденцию роста рынка страхования в России. Страховой рынок развивается довольно интенсивно, становится более устойчивым и прозрачным, быстро адаптируется к новым реалиям.

Проверка статистических гипотез

Одним из важнейших шагов в процессе анализа данных является проверка статистических гипотез. Зачастую в исследовании необходимо иметь сведения о законе распределения данных. Предварительную информацию, на основе которой можно выстроить предположения о виде распределения, можно извлечь из гистограмм (рис. 5).

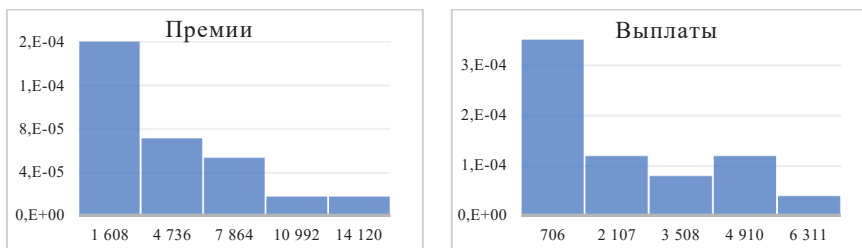


Рис. 5. Гистограммы годовых премий и выплат компании «ВТБ страхование» за 2004–2021 гг. по страхованию имущества

В работе рассмотрены различные виды страхования и организации с разнообразным рейтингом. В данной статье будут приведены в основном результаты на примере компании «ВТБ страхование». В большинстве случаев гистограммы имеют схожую структуру: большие суммы встречаются с меньшей частотой. На основании этого можно предположить, что данные согласуются с одним из следующих законов: гамма-распределение, экспоненциальное распределение, распределение Вейбулла. Соответствующие гипотезы проверялись различными методами [4] на двух уровнях значимости: 0,05 и 0,01. Результаты тестирования предположений (табл. 1–2), представляющие собой доли случаев, в которых различия с предполагаемыми распределениями признаются незначимыми, позволяют сделать вывод о том, что лучше всего подходят гамма-распределение и распределение Вейбулла.

Таблица 1

Результаты проверки гипотез о виде распределений для премий, собранных по страхованию имущества

Критерий	Гамма-распределение		Экспоненциальное распределение		Распределение Вейбулла	
	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01
Хи-квадрат	45,5 %	64,5 %	30 %	41,5 %	40 %	61 %
Колмогорова	75 %	81 %	50,5 %	65 %	63,5 %	79 %
Смирнова	50,5 %	71 %	31,5 %	44 %	61 %	77,5 %
Манна – Уитни	78,5 %	82 %	66,5 %	77 %	79 %	87 %

Таблица 2

**Результаты проверки гипотез о виде распределений для
выплат по страхованию имущества**

Критерий	Гамма-распределение		Экспоненциальное распределение		Распределение Вейбулла	
	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01
Хи-квадрат	41 %	60 %	42,5 %	46 %	54,5 %	63 %
Колмогорова	76,5 %	88 %	61,5 %	66 %	70 %	81,5 %
Смирнова	53 %	68,5 %	36,5 %	45,5 %	55 %	74,5 %
Манна - Уитни	75 %	89 %	57,5 %	70 %	82 %	86,5 %

Математические модели страхования

Важной задачей в математической теории страхования является оценка вероятности разорения, для которой необходимо построение математической модели. Классическая модель страхования была предложена Филиппом Лундбергом и Харальдом Крамером [5]. В ее основе лежат следующие предположения: процесс поступления премий является детерминированным, за время t приращение капитала равно ct , где c – скорость поступлений. Страховые выплаты считаются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами, а моменты выплат образуют пуассоновский поток интенсивности μ . Поток выплат не зависит от поступления премий.

Пусть $S(t)$ – капитал компании в момент t . При сделанных выше предположениях

$$S(t) = S(0) + ct - \sum_{i=1}^{M(t)} y_i, \quad (1)$$

где $S(0)$ – начальный капитал; $M(t)$ – число страховых выплат до момента времени t ; y_i – размер i -й выплаты. Величину $S(t)$ иногда называют процессом риска. Так как процесс $M(t)$ считается пуассоновским, то сумма страховых выплат за время t образует составной пуассоновский процесс.

Данная модель довольно проста, но она не отражает многие черты деятельности российских страховых компаний. Основной недостаток состоит в предположении о детерминированности потока поступлений. Такая ситуация больше подходит для более развитых стран со стабильной экономикой, где много видов

обязательного страхования. В нашем случае естественно считать, что премии так же, как и выплаты, поступают в случайные моменты времени. Модель, в которой поток страховых премий является пуассоновским, а премии, аналогично выплатам, являются случайными величинами, называется моделью Спарре Андерсена и имеет вид:

$$S(t) = S(0) + \sum_{i=1}^{N(t)} x_i - \sum_{i=1}^{M(t)} y_i, \quad (2)$$

где $S(0)$ — начальный капитал; $N(t)$ — число поступивших страховых премий до момента t ; $M(t)$ — число страховых выплат до момента t ; x_i — размер i -й премии; y_i — размер i -й выплаты. Величины

$$z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} x_i, \quad \eta(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} y_i$$

образуют составные процессы Пуассона.

В процессе проверки гипотез было установлено, что годовые премии и выплаты согласуются с гамма-распределением в большинстве случаев. Известно, что сумма независимых экспоненциально распределенных случайных величин имеет распределение Эрланга, что является частным случаем гамма-распределения. В связи с этим в данной работе предполагается, что страховые премии и страховые выплаты в модели (2) имеют экспоненциальные распределения с плотностями

$$\varphi(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}, \quad \psi(y) = \frac{1}{b} e^{-\frac{y}{b}}. \quad (3)$$

Обозначим моменты $m_k(t) = E(S(t)^k)$, $k = \overline{1,4}$. Считая для простоты, что $S(0) = 0$, имеем для $k = 1$:

$$m_1(t) = E(z(t) - \eta(t)) = E(z(t)) - E(\eta(t)). \quad (4)$$

Используя свойство условного математического ожидания, находим:

$$\begin{aligned} E(z(t)) &= E(E(z(t) | N(t) = n)) = E\left(\sum_{i=1}^n E(x_i | N(t) = n)\right) = \\ &= E(na) = E(N(t)a) = \lambda ta. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично получаем: $E(\eta(t)) = \mu tb$. Подставляя результаты в формулу (4), будем иметь: $m_1(t) = (\lambda a - \mu b)t$. Вычисляя подобным образом моменты 2-го, 3-го и 4-го порядков, получаем систему уравнений:

$$m_1(t) = (\lambda a_1 - \mu b_1)t, (6)$$

$$m_2(t) = (\lambda a_2 + \mu b_2)t + (\lambda a_1 - \mu b_1)^2 t^2, (7)$$

$$m_3(t) = (\lambda a_3 - \mu b_3)t + 3(\lambda a_2 + \mu b_2)(\lambda a_1 - \mu b_1)t^2 + (\lambda a_1 - \mu b_1)^3 t^3, (8)$$

$$m_4(t) = (\lambda a_4 + \mu b_4)t + (2(\lambda a_1 - \mu b_1)(\lambda a_3 - \mu b_3) + 3(\lambda a_2 + \mu b_2)^2 + \frac{3}{2}(\lambda a_3 - \mu b_3)(\lambda a_1 - \mu b_1))t^2 + 3(\lambda a_2 + \mu b_2)(\lambda a_1 - \mu b_1)^2 t^3 + (\lambda a_1 - \mu b_1)^4 t^4. (9)$$

При экспоненциальных распределениях страховых премий и страховых выплат имеем: $a_k = k! a^k$, $b_k = k! b^k$. Разрешив численно систему нелинейных уравнений (6) – (9), получаем оценки по методу моментов неизвестных параметров $\hat{a}(t)$, $\hat{b}(t)$, $\hat{\lambda}(t)$, $\hat{\mu}(t)$ (табл. 3).

Таблица 3

Оценки параметров, рассчитанные по данным о страховании имущества компании «ВТБ страхование»

t	$\hat{\lambda}(t)$	$\hat{\mu}(t)$	$\hat{a}(t)$	$\hat{b}(t)$
2004	19,38	5,33E-07	0,83	271,51
2005	4,03	6,18E-02	31,72	61,22
2006	2,24	5,80E-02	28,43	97,97
2007	1,84	9,28E-03	85,40	255,45
2008	1,66	1,87E-02	98,70	270,89
2009	0,88	1,64E-02	150,27	386,74
2010	0,61	1,15E-02	243,39	744,06
2011	0,56	8,95E-03	269,05	753,81
2012	0,48	7,42E-03	250,22	839,79
2013	0,45	6,41E-03	272,73	894,35
2014	0,38	3,01E-04	496,53	2 402,00
2015	0,34	4,67E-05	913,88	5 000,77
2016	0,32	6,45E-04	1 178,86	2 873,71
2017	0,21	6,78E-03	1 625,60	2 219,59
2018	0,20	1,13E-02	1 517,72	1 787,22
2019	0,17	1,23E-02	1 539,57	2 023,30
2020	0,11	1,58E-02	1 656,91	1 329,57
2021	0,10	1,92E-02	1 775,86	1 042,44

Далее на основании рассчитанных оценок моделируются однородные процессы Пуассона $\hat{N}(t)$, $\hat{M}(t)$, составные процессы Пуассона $\hat{z}(t)$, $\hat{\eta}(t)$ и рассчитываются значения $\hat{S}(t)$. На рисунках 6–7 можно видеть различия между истинными и модельными значениями.

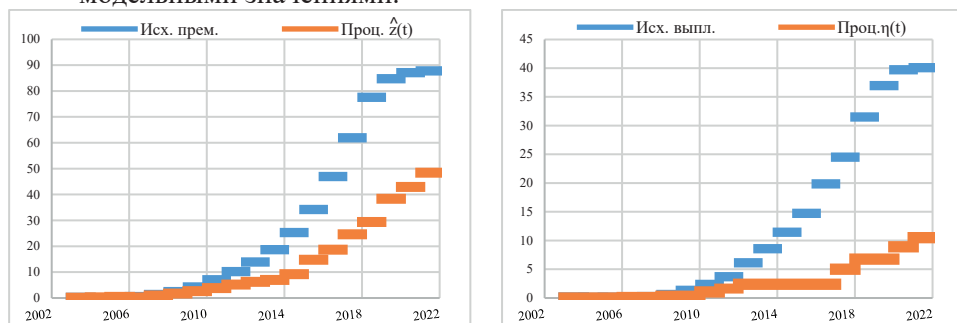


Рис. 6. Сравнение исходных данных о страховании имущества компании «ВТБ страхование» и составных процессов Пуассона, млрд руб.

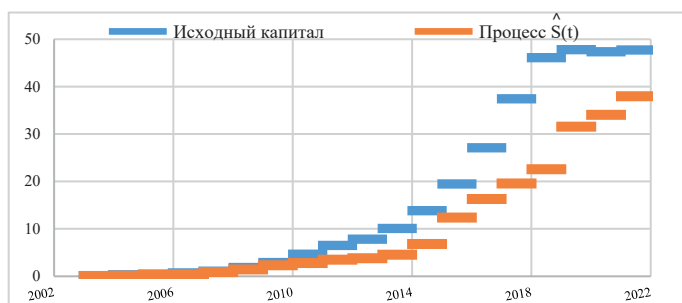


Рис. 7. Сравнение истинных и модельных значений капитала компании «ВТБ страхование» по данным о страховании имущества, млрд руб.

Анализ результатов моделирования

В работе рассмотрено большое количество страховых компаний и различные виды страхования. Анализируя полученные результаты, можно выделить следующее:

- Оцененные интенсивности поступлений оказываются больше оцененных интенсивностей страховых случаев. А средние значения премий, наоборот, гораздо меньше

- средних значений выплат. Такая структура оценок параметров согласуется с реальной ситуацией на рынке.
- Оценки параметров отклонены от действительности: оцененные интенсивности занижены, а оценки средних – завышены.
 - Составной процесс Пуассона для премий чаще всего имеет значения того же порядка, что и исходные данные. Однако отклонения получаются достаточно большими.
 - Составной процесс Пуассона для выплат плохо описывает реальные данные по причине сильно заниженных значений оценок интенсивностей.
 - Графики истинных и модельных значений капитала сходны по структуре. В начальные моменты времени различий практически не наблюдается, однако потом отклонения увеличиваются. Для крупных организаций разница оказалась весьма велика. В случае небольших компаний результаты получились более близкими, но высокая точность не была достигнута.
 - Продолжением данной работы будет являться построение дискретного аналога модели Спарре Андерсена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikosch T. *Non-Life Insurance Mathematics: an Introduction with the Poisson Process.* / T. Mikosch. – Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 432 p.
2. Центральный банк Российской Федерации: URL : <https://www.cbr.ru/>
3. *Страхование сегодня.* URL : <https://www.insur-info.ru/>
4. Боровков А.А. *Математическая статистика* / А.А. Боровков. – Новосибирск : Наука : Институт математики, 1997. – 771 с.
5. Глухова Е.В. *Математические модели страхования* / Е.В. Глухова, О.А. Змеев, К.И. Лившиц. – Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2004. – 180 с.

Кузнецова Екатерина Андреевна, студентка ММФ ТГУ,
katyakuz200017@gmail.com.

Пчелинцев Евгений Анатольевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа и теории функций, evgen-pch@yandex.ru.

Различные аппроксимации конвективных слагаемых в задачах естественной конвекции

М.Н. Мамзиков, М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. На основе системы уравнений Навье – Стокса совместно с уравнением энергии в приближении Обербека – Буссинеска проведено численное моделирование процесса циркуляции вязкой несжимаемой жидкости внутри замкнутой вертикальной квадратной полости с изотермическими вертикальными стенками. В рамках представленной математической модели проведен сравнительный анализ влияния различных аппроксимаций для конвективных слагаемых на сходимость процесса и полученные распределения изолиний функции тока и температуры. Создан вычислительный комплекс для моделирования конвективного теплообмена в квадратной полости, позволяющий описать течение при заданных параметрах. Полученные данные сравнены с бенчмарком De Vahl Davis’а. Результаты показывают, что наиболее корректные значения достигаются при использовании схемы «против потока» и монотонной аппроксимации А.А. Самарского.

Ключевые слова: аппроксимация конвективных слагаемых, квадратная полость, естественная конвекция, метод конечных разностей.

Дифференциальные уравнения Навье – Стокса совместно с уравнением энергии описывают процессы конвективного теплообмена в жидкостях [1–8]. К сожалению, аналитические решения этих уравнений найдены лишь в некоторых частных случаях.

В связи с высокой практической значимостью разработан ряд численных методов для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Широко используется метод конечных разностей. Численное решение краевой задачи для дифференциальных уравнений является лишь приближенным решением. Возникает проблема оценки точности приближенного решения.

Решение проблемы оценки точности для задач естественной конвекции было найдено. В 1979 году в Суонси на конференции Numerical Methods in Thermal Problems было предположено, что задача естественной конвекции в квадратной

области с вертикальными дифференциально обогреваемыми стенками могла бы стать подходящей модельной задачей для проверки точности решения разностной схемы. Выбор модельной задачи не случаен – она имеет множество практических применений, среди которых термоизоляция реактора, охлаждение контейнеров с радиоактивными отходами, вентиляция помещения, предотвращение пожаров, накопление солнечной энергии, рассеивания отработанного тепла в эстуариях. В результате работы конференции был получен бенчмарк для оценки точности решения задач естественной конвекции – бенчмарк De Vahl Davis'a [3].

Большую проблему при построении разностных схем доставляет аппроксимация нелинейных конвективных слагаемых вида $u \frac{\partial u}{\partial x}$. Основная сложность заключается в том, что конвективный член обладает двумя не зависящими друг от друга особенностями, которые необходимо принять во внимание.

Во-первых, этот член содержит первые производные по пространственной переменной. При использовании для аппроксимации члена $\frac{\partial u}{\partial x}$ симметричной трехточечной формулы в решении возникают колебания нефизического характера, если вязкий член оказывается малым в сравнении с конвективным членом. При аппроксимации члена $\frac{\partial u}{\partial x}$ несимметричными формулами достигается улучшение гладкости получаемого решения, но точность аппроксимации при этом оказывается на один порядок ниже.

Во-вторых, конвективный член является нелинейным по отношению к искомой переменной.

В связи с приведенными выше особенностями аппроксимации конвективных членов остро стоит вопрос проведения сравнения различных разностных схем.

Математическая модель

Вязкая несжимаемая жидкость циркулирует внутри замкнутой квадратной области с изотермическими вертикальными неподвижными стенками.

Введена декартова прямоугольная система координат $O\bar{x}\bar{y}$, как показано на рисунке 1.

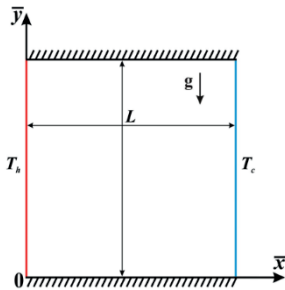


Рис. 1. Область решения

Область решения представляет собой квадратную полость характерного размера L . В начальный момент времени температура жидкости внутри полости $T = T_0$, на вертикальных стенках температура T_h и T_c соответственно, рабочая жидкость (воздух) покоится. Воздух моделируется ньютоновской жидкостью, удовлетворяющей условию Буссинеска.

Предполагается, что свойства среды не зависят от температуры.

При моделировании процесса теплообмена рассматриваются следующие значения чисел Прандтля и Рэлея: $Pr = 0,7$, $Ra = 10^3 - 10^8$.

Для описания течения вязкой жидкости используются уравнения Навье – Стокса совместно с уравнением энергии. Вывод уравнений представлен в [5–7]. При постановке задачи процесс описывается двумерными нестационарными уравнениями Навье – Стокса в приближении Буссинеска. Основная идея приближения Буссинеска заключается в предположении, что отклонение плотности рабочей среды от среднего значения, вызванное изменением температур, предполагается малым и для члена, содержащего подъемную силу, может быть описано, как $\rho(T) = \rho_0(1 - \beta\theta)$, где β – термический коэффициент объемного расширения жидкости, θ – отклонение температуры от равновесного состояния, ρ_0 – плотность при равновесной температуре.

Тогда уравнения неразрывности, движения и энергии запишутся в виде:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} \cdot \bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{u} \cdot \bar{v})}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} \cdot \bar{v})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{v} \cdot \bar{v})}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + g\beta(T - T_0) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} \cdot T)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{v} \cdot T)}{\partial \bar{y}} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4)$$

Здесь \bar{y} , \bar{x} – координаты декартовой системы координат; t – время; \bar{u} , \bar{v} – составляющие скорости в проекции на оси \bar{y} , \bar{x} , соответственно; \bar{P} – давление; ρ – плотность жидкости; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; T – температура жидкости; g – ускорение свободного падения; a – коэффициент температуропроводности жидкости; T_0 – начальная температура.

Область изменения независимых переменных: $0 < \bar{y} < L$, $0 < \bar{x} < L$, $0 < t < T'$.

Для приведения к безразмерному виду использовались соотношения (совпадающие с обезразмериванием, проведенным De Vahl Davis'ом [3]):

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{g\beta\Delta T}{L}}, \quad u = \frac{\bar{u}}{\sqrt{g\beta\Delta T L}}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\sqrt{g\beta\Delta T L}}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T},$$

$$p = \frac{\bar{p}}{\rho g \beta \Delta T L}, \quad \Delta T = T_h - T_c, \quad T_0 = \frac{T_h + T_c}{2}, \quad Pr = \frac{\mu \cdot C}{\lambda}, \quad Ra = \frac{\rho g \beta (T_h - T_c) L^3}{\mu a},$$

где C – удельная теплоемкость среды, λ – коэффициент теплопроводности среды.

Система уравнений (1) – (4) с соответствующими начальными и граничными условиями для скоростей и температур является замкнутой системой.

Данная система уравнений может быть записана в ином виде. Для этого введем в рассмотрение функцию тока и завихренность следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Тогда система уравнений (1) – (4) с начальными и граничными условиями примет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (5)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

Начальные условия:

$$\psi(x, y, 0) = \omega(x, y, 0) = \theta(x, y, 0) = 0$$

Граничные условия:

на левой вертикальной стенке ($x=0$): $\psi = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, $\theta = \theta_h = 0.5$;

на правой вертикальной стенке ($x=1$): $\psi = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, $\theta = \theta_c = -0.5$;

на горизонтальных стенках ($y=0$) и ($y=1$): $\psi = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$.

Для решения системы уравнений (5) – (7) используется *метод конечных разностей* [5–7].

Для аппроксимации граничных условий для завихренности используются формулы Тома и Пирсона [7].

Для аппроксимации уравнения Пуассона для функции тока (5) используется пятиточечный шаблон схемы крест. Полученная СЛАУ имеет разреженную матрицу. Для решения системы используется метод последовательной верхней релаксации (SOR) [7].

Для решения уравнений дисперсии завихренности (6) и энергии (7) используется локально-одномерная схема А.А. Самарского [6]. Вариант реализации этой схемы для уравнения дисперсии завихренности имеет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} \Big|^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial(u \cdot \omega)}{\partial x} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} \Big|^{n+1} + \frac{\partial(v \cdot \omega)}{\partial y} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

В дальнейшем для аппроксимации диффузионных слагаемых используется центральная разность, для нестационарных слагаемых – разность «вперед». Для аппроксимации конвективных слагаемых используются [5–7]:

- 1) монотонная аппроксимация А.А. Самарского,
- 2) разность «по потоку»,
- 3) разность «против потока»,
- 4) центральная разность,
- 5) центральная разность для дивергентной формы записи определяющих уравнений.

Полученные системы разностных уравнений имеют ленточный вид, поэтому для решения этих систем с трехдиагональной матрицей используется метод трехточечной прогонки.

Анализ полученных результатов

Для тестирования разработанного вычислительного алгоритма были проведены расчеты на сетках размерности 50×50 , 100×100 , 150×150 для выяснения эффекта влияния размера сетки на среднее число Нуссельта при $Pr = 0,7$, $Ra = 10^3 - 10^6$. На основании сравнения (таблица 1) было установлено, что сетка 100×100 является оптимальной для проведения численного моделирования. Данные тестов представлены для монотонной аппроксимации А.А. Самарского.

Также в таблице 1 представлены результаты сравнения с численными данными других авторов [1, 2].

Таблица 1.

Влияние параметров сетки на средние числа Нуссельта

Ra	50×50	100×100	150×150	[1]	[2]
10^3	1,117	1,117	1,117	—	—
10^4	2,237	2,244	2,244	2,244	2,245
10^5	4,510	4,524	4,532	4,536	4,522
10^6	9,110	8,990	8,909	8,860	8,929

Ниже представлены линии тока (рисунок 2) и изотермы (рисунок 3) при $Ra = 10^6$ для пяти исследуемых схем, а также показано решение de Vahl Davis'a.

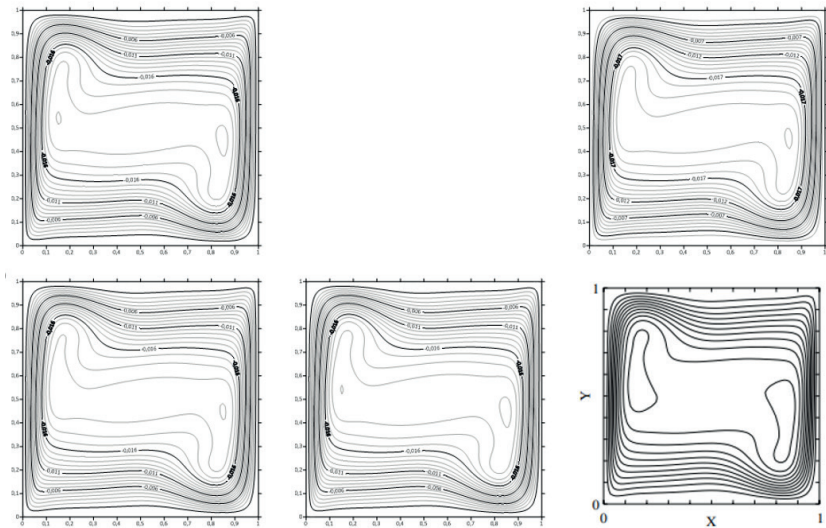


Рис. 2. Линии тока при $Ra = 10^6$ для (слева направо, сверху вниз) монотонной аппроксимации Самарского, разности «по потоку», разности «против потока», центральной разности, центральной разности в случае дивергентной формы записи, решение de Vahl Davis'a

Из симметричности изолиний относительно побочной диагонали можно сделать вывод о том, что все представленные схемы правильно описывают исследуемый процесс. Вблизи вертикальных изотермических стенок формируются пограничные слои, толщины которых уменьшаются с ростом числа Рэлея. Установлено, что на выбранном наборе

вычислительных параметров схема «по потоку» не позволяет получить корректный результат, что также подтверждается работами других авторов [8].

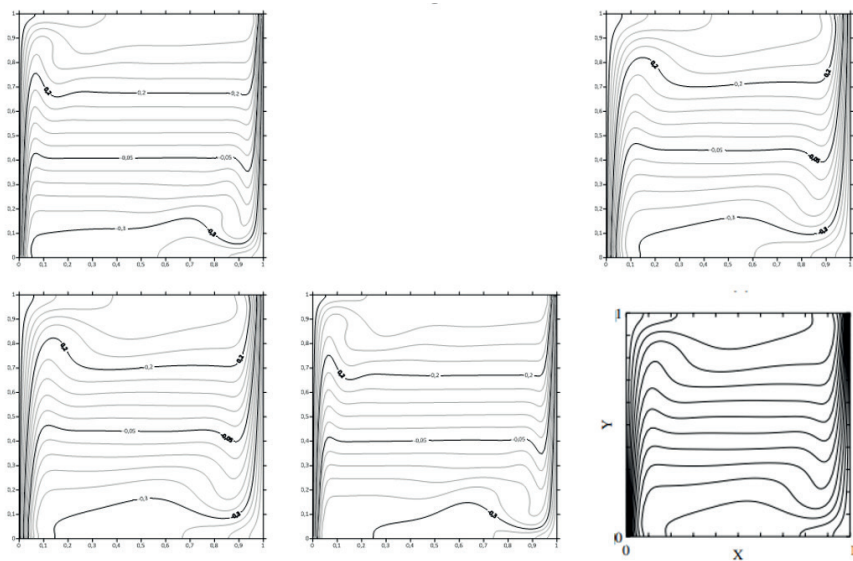


Рис. 3. Изотермы при $Ra = 10^6$ для (слева направо, сверху вниз) монотонной аппроксимации А.А. Самарского, разности «по потоку», разности «против потока», центральной разности, центральной разности в случае дивергентной формы записи, решение de Vahl Davis'a

В таблице 2 представлены значения среднего числа Нуссельта на нагретой стенке в зависимости от рассматриваемых аппроксимаций конвективных слагаемых.

Таблица 2.

Средние числа Нуссельта в зависимости от выбранной схемы

Ra	Средние числа Нуссельта					Данные [3] и [4]
	монотонная аппроксимация А.А. Самарского	схема «по потоку»	схема «против потока»	центральная разность	центральная разность в случае дивергентной формы	
10^3	1,11768	1,12085	1,11485	1,11779	1,11781	1,117 ^[3]
10^4	2,24353	2,27955	2,21076	2,24521	2,24568	2,238 ^[3]
10^5	4,52442	4,64156	4,41781	4,53016	4,53233	4,509 ^[3]
10^6	8,83024	—	8,61681	8,85766	9,02847	8,817 ^[3]
10^7	16,4359	—	15,4971	19,2389	18,7084	16,523 ^[4]
10^8	42,4293	—	26,8218	—	25,3959	30,225 ^[4]

Заключение

На основании полученных результатов можно сказать, что монотонная аппроксимация А.А. Самарского и центральная разность в случае дивергентной формы записи определяющих уравнений дают наиболее корректные результаты по сравнению с другими рассмотренными схемами при заданных сеточных параметрах, а также значений Ra и Pr . Также можно сказать, что в классе схем первого порядка точности наиболее эффективной является схема «против потока».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Merrikh A.A., Lage J.L. *Natural convection in an enclosure with disconnected and conducting solid blocks*, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48 (2005) 1361–1372
2. Kalita J.C., Dalal. D.C., Dass A.K. *Fully compact higher-order computation of steady-state natural convection in a square cavity*, *Phys. Rev. E* 64 (2001) 066703.
3. De Vahl Davis G. *Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution*, *Int. J. for Numerical Methods of Fluids* 3 (1983) 249–264
4. P. Le Que're', *Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number*, *Comput. Fluids* 20 (1991) 29–41
5. Роуч П., *Вычислительная гидродинамика*, МИР, Москва, 1980 г., 618 с.
6. Шеремет М.А. *Сопряженные задачи естественной конвекции: замкнутые области с локальными источниками тепловыделения*, Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 167 с.
7. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. *Численное моделирование процессов тепло- и массообмена*, М. : Наука, 1984. – 288 с.
8. Hirsch C. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, John Wiley&Sons, 1990.

Мамзиков Матвей Николаевич, студент ММФ ТГУ, mamzikof@mail.ru.

Шеремет Михаил Александрович, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой теоретической механики ММФ ТГУ, sheremet@math.tsu.ru.

Численное моделирование теплообмена и химического реагирования равновесно диссоциирующего газа

П.С. Мартынов¹, О.В. Матвиенко^{2, 3}

¹ *Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева, Томск.*

² *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск.*

³ *Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск*

Аннотация. В работе приведены результаты исследований теплообмена в цилиндрическом канале турбулентного потока тетраоксида азота N_2O_4 . В результате показано, что с увеличением температуры на стенке усиливается протекание в потоке химической реакции и поглощение тепла, подводимого от стенки. Температура пристеночных слоев в химически реагирующем потоке становится ниже, чем в потоке с инертным теплоносителем. Увеличение скорости прокачки реагента приводит к ослаблению диссоциации. Использование диссоциирующего теплоносителя становится эффективным при невысокой скорости прокачки в длинных каналах. Эффективность использования в качестве теплоносителя диссоциирующего газа при низких значениях температуры стенки является незначительной. Получены аппроксимационные формулы для определения критерия теплоотдачи в химически инертном и химически реагирующем потоках.

Ключевые слова: теплообмен, химическое реагирование, диссоциация, пограничный слой, тетраоксида азота.

Процессы тепломассопереноса широко распространены в современной энергетике, химической технологии, металлургии и других отраслях промышленности. Поэтому изучение закономерностей теплообмена открывает пути к решению многих практически важных задач в различных областях техники. В теории теплообмена всегда большую роль играл эксперимент. Однако в последние десятилетия заметно возросла роль теоретических методов исследования [1–9].

Целью настоящей работы является численное исследование влияния протекания первой стадии реакции

диссоциации тетраоксида диазота на теплообмен потока в круглой цилиндрической трубе.

Для описания структуры потока используются двумерные осесимметричные уравнения Рейнольдса, записанные относительно осредненных по времени составляющих осевой u , радиальной v , составляющих скорости и давления p [10, 11]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial x} = 0 ; (1)$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{\text{eff}} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{\text{eff}} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] ; (2)$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{\text{eff}} r \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] - 2 \frac{\mu_{\text{eff}} v}{r^2} . (3)$$

Исследование характеристик турбулентности осуществлялось с использованием составной модели Ментера SST (Shear Stress Transport) [12].

Для моделирования теплопереноса используется уравнение теплопроводности с учетом протекающей в потоке реакции [13–16]:

$$C_p \left(\frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r T}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda_{\text{eff}} r \frac{\partial T}{\partial r} \right] - Q \Phi ; (4)$$

$$\Phi = \rho \left(u \frac{\partial M_{N_2O_4}}{\partial x} + v \frac{\partial M_{N_2O_4}}{\partial r} \right) . (5)$$

Плотность среды ρ определяется уравнением состояния:

$$\rho = \frac{p}{R_g T} \left(\frac{M}{W_{N_2O_4}} + \frac{1-M}{W_{NO_2}} \right)^{-1} . (6)$$

Граничные условия задаются в следующем виде:

$$x = 0 : u = u_{\text{in}}, v = 0, T = T_{\text{in}} ; (7)$$

$$x = L: \frac{\partial u}{\partial x} = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0; (8)$$

$$r = 0: \frac{\partial u}{\partial r} = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0; (9)$$

$$r = R: u = 0, v = 0, T = T_w. (10)$$

Уравнения (1) – (4) были решены численно с использованием метода конечного объема [17, 18]. Численное решение проводилось с использованием шахматной сетки, причем узлы для осевой и радиальной составляющих скорости располагались в середине граней контрольных объемов для скалярных величин. Вычисления проведены на сетке с 2 000 узлами в осевом направлении и 1 700 узлами в радиальном. Вблизи стенок, а также в областях с большими градиентами скорости и концентрации проводилось сгущение сетки.

В результате вдува реагирующего газа в трубу происходит формирование динамического пограничного слоя. На незначительном удалении от входного сечения структура потока характеризуется наличием центральной области, называемой ядром потока [19], в которой газ движется с одинаковой по сечению скоростью и пристеночной зоны пограничного слоя (рис.1).

На рисунке 2 показаны радиальные распределения температуры в химически реагирующем и химически инертном потоках, рассчитанные в разных сечениях. Распределение температуры в ядре потока на начальном участке характеризуется постоянными значениями. Вблизи стенки заметна область резкого изменения температуры. Ядро потока имеет температуру, равную начальной температуре.

Нагрев пристеночных слоев приводит к смещению химического равновесия в сторону образования диоксида азота. В результате этого концентрация тетраоксида диазота N_2O_4 в пристеночной области значительно уменьшается. Происходит формирование концентрационного пограничного слоя (рис. 3).

Процесс формирования концентрационного пограничного слоя характеризуется теми же особенностями, что и процесс формирования температурного пограничного слоя.

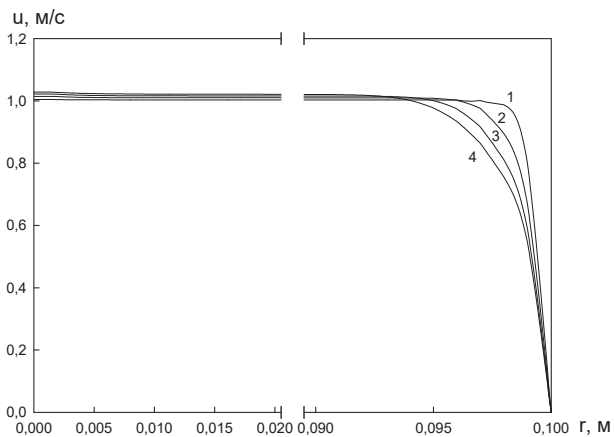


Рис. 1. Радиальное распределение осевой скорости:
 $u_{in} = 1 \text{ м/с}$, $T_{in} = 300 \text{ К}$, $T_w = 750 \text{ К}$, 1 – $x = 0,2 \text{ м}$, 2 – $0,7 \text{ м}$, 3 – $1,2 \text{ м}$, 4 – $1,7 \text{ м}$

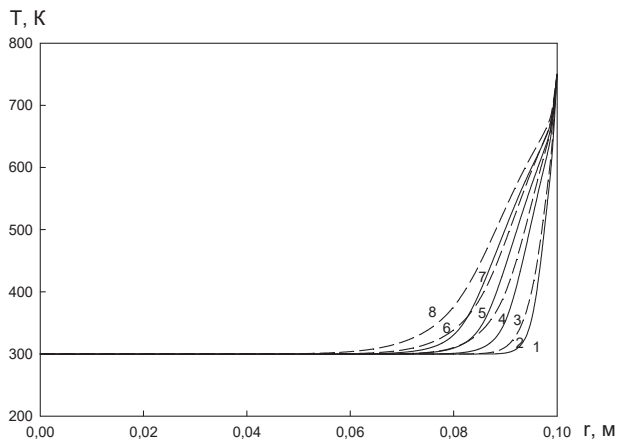


Рис. 2. Радиальное распределение температуры (сплошные линии – химически реагирующий поток, пунктирные – инертный поток):
 $u_{in} = 1 \text{ м/с}$, $T_{in} = 300 \text{ К}$, $T_w = 750 \text{ К}$, 1 – $x = 0,2 \text{ м}$, 2 – $0,7 \text{ м}$, 3 – $1,2 \text{ м}$, 4 – $1,7 \text{ м}$

Вниз по потоку наблюдаются толщины концентрационного слоя. При этом по мере термической стабилизации концентрация N_2O_4 в потоке уменьшается.

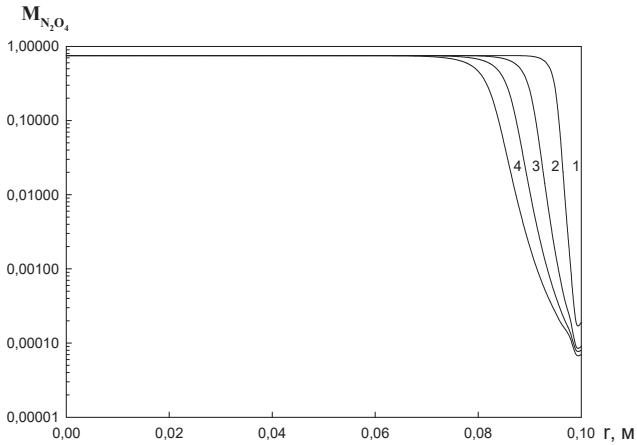


Рис. 3. Радиальное распределение концентрации $M_{N_2O_4}$:
 $u_{in} = 1$ м/с, $T_{in} = 300$ К, $T_w = 750$ К, $1 - x = 0,2$ м, $2 - 0,7$ м, $3 - 1,2$ м, $4 - 1,7$ м

В инженерных расчетах удобно использовать безразмерный коэффициент теплоотдачи – число Нуссельта $Nu = \alpha d / \lambda$, характеризующий связь между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое ($d = 2R$ – диаметр трубы).

При течении эндотермически реагирующего потока теплоотдача возрастает. При этом в отличие от инертного теплоносителя величина числа Нуссельта Nu на начальном участке зависит от температуры стенки. На рис. 4 показано изменение вниз по потоку числа Нуссельта Nu , рассчитанного для химически реагирующего потока при различных температурах стенки. Как уже отмечалось, увеличение температуры стенки интенсифицирует протекание химической реакции в пристеночной зоне и препятствует прогреву потока. В результате этого с ростом температуры стенки происходит рост значений числа Нуссельта.

Для определения числа Нуссельта в потоке с химической реакцией на основе выполненных расчетов предлагается использовать зависимость:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} + 340(1 + 0.5\theta)e^{-x/L}, \quad (11)$$

которая при $\theta \rightarrow 0$ асимптотически переходит в формулу Михеева [20].

Результаты расчетов показывают, что с увеличением температуры стенки интенсифицируется протекание в потоке химической реакции и поглощение тепла, подводимого от стенки. Температура пристеночных слоев в химически реагирующем потоке становится ниже, чем в потоке с инертным теплоносителем, а толщина температурного пограничного слоя – уже. Увеличение скорости прокачки реагента и связанное с этим уменьшение температуры в пристеночной области на одном и том же удалении от входа приводит к увеличению концентрации N_2O_4 и ослаблению диссоциации. Использование диссоциирующего теплоносителя становится эффективным при невысокой скорости прокачки в длинных каналах. Эффективность использования в качестве теплоносителя диссоциирующего газа при низких значениях температуры стенки является незначительной. При течении эндотермически реагирующего потока теплоотдача возрастает. При этом в отличие от инертного теплоносителя величина числа Нуссельта на начальном участке зависит от температуры стенки.

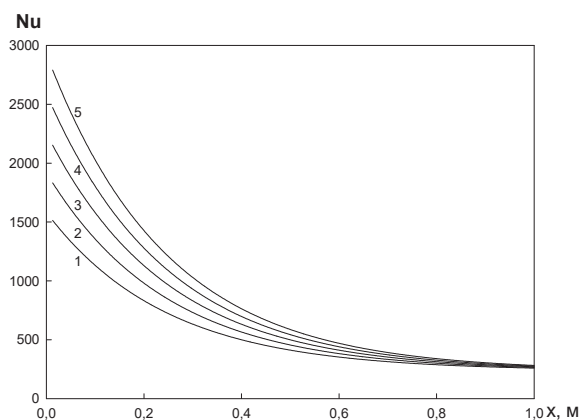


Рис. 4. Изменение числа Нуссельта Nu вниз по потоку: $u_{in} = 5$ м/с ($Re=103300$), 1 – химически инертный поток, 2 – $T_w = 750$ К, 3 – 600 К, 4 – 750 К, 5 – 900 К

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Справочник по теплообменникам. Т. 1. / пер. с англ. : Под ред. Петухова Б.С., Шикова В.К. М.: Энергоатомиздат, 1987. – 560 с.*
2. *Матвиенко О.В. Исследование теплообмена и формирования турбулентности во внутреннем закрученном потоке жидкости при низких числах Рейнольдса // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 4. С. 908–918.*
3. *Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М. : Атомиздат, 1979. – 416 с.*
4. *Нестеренко В.Б., Тверковкин Б.Е. Теплообмен в ядерных реакторах с диссоциирующим теплоносителем. Минск: Наука и техника, 1980.*
5. *Дик И.Г., Матвиенко О.В. Теплообмен в закрученном потоке при наличии эндотермической реакции // Теплофизика Высоких Температур. 1990. № 2. С. 190–191.*
6. *Вихорев И.Б. Теплообмен и сопротивление при внутренних течениях многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей // Вестник МГТУ. Т. 1. № 2. С. 89–94.*
7. *Петухов В.С., Шиков В.К. Теплообмен и сопротивление при течениях в трубах диссоциирующего азотного тетраоксида. Метод расчета. Исследование ламинарного течения // Теплофизика высоких температур. 1977. Т. 15. № 4. С. 785–794.*
8. *Матвиенко О.В., Бубенчиков А.М. Математическое моделирование теплообмена и химического реагирования закрученного потока диссоциирующего газа // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 118–126.*
9. *Нестеренко В.Б., Бубнов В.П., Котельских Ю.Г., Лантратова Н.Я., Малько М.В., Сухотин А.М., Тимофеев Б.Д. Физико-химические и теплофизические свойства химически реагирующей системы $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$. Под общей редакцией Нестеренко В.Б. Минск : Наука и техника, 1976. – 344 с.*
10. *Лоїцянський Л. Г. Механіка жидкості і газу. М. : Наука, 1974.*
11. *Матвиенко О.В., Байгулова А.И., Бубенчиков А.М. Математическое моделирование каталитического окисления метана в канале с пористой вставкой // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 6. С. 1245–1260.*
12. *Menter F.R. Zonal Two Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows // AIAA Paper. 1993. Technical Report No. 93–2906.*
13. *Дик И.Г., Матвиенко О.В. Теплообмен закрученных потоков с объемным источником тепла // Журнал Прикладной Механики и Технической Физики. 1989. № 5. С. 113–116.*
14. *Ушаков В.М., Матвиенко О.В. Численное исследование теплообмена и зажигания реакционноспособных стенок канала высокотемпературным потоком закрученного газа // Инженерно-физический журнал. 2005. Т. 78. № 3. С. 123–128.*

15. Каницев О.А., Конаков В.Г. Количественная оценка состава паров амила в условиях эксплуатации // Вестник СПбГУ. Сер. 4. Т. 2 (60). 2015. Вып. 1. С. 98–101.
16. Svelba R.A., Brokaw R.S. *Thermodynamic and transport properties for the $N_2O_4 \leftrightarrow 2NO_2 \leftrightarrow 2NO + O_2$ system* // NASA TN D-3327. 1966.
17. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1983.
18. Van Doormal J.P., Raithby G.D. *Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows* // Numerical Heat Transfer. 1984. V. 7. P. 147–163.
19. Дик И.Г., Матвиенко О.В. *Некоторые закономерности теплообмена внутренних закрученных потоков. Известия СО АН СССР, Сер. техн. наук, 1989. Вып. 3, С. 40–43.*
20. Михеев М.А. *Основы теплопередачи. М.-Л. : ГЭИ, 1956. – 390 с.*

Мартынов Павел Сергеевич, м. н. с., ИОА СО РАН, marty Pavel@bk.ru.

Матвиенко Олег Викторович, д-р физ.-мат. наук, профессор, с. н. с., ТГУ, matvolegv@mail.ru.

Исследование смешения вязких жидкостей в статическом смесителе

О.В. Матвиенко^{1, 2}, В.А. Ромащенко¹
А.Е. Литвинова¹

¹ *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск.*

² *Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск*

Аннотация. Представлены результаты исследования турбулентного смешения потоков в статическом смесителе. С увеличением различия скоростей потоков существенно интенсифицируется смешение. Однородное распределение массовых долей смешиваемых компонентов достигается на меньшем удалении от входного сечения.

Ключевые слова: смешение, турбулентность, статический смеситель, диффузия.

Одним из главных показателей качества бензина является его детонационная стойкость, которая позволяет нормально работать двигателю на всех стадиях его эксплуатации. Для повышения надежности работы двигателя целесообразно повышать октановое число бензинов с применением специальных многофункциональных добавок. Оксигенаты в настоящее время рассматриваются как наиболее перспективные антидетонационные добавки к бензинам. Это обусловлено хорошей сбалансированностью их эксплуатационных, экологических и стоимостных характеристик. Благодаря применению оксигенатов удается повысить ресурсы топлив, а также снизить их вредное влияние на окружающую среду [1].

Наиболее распространенным способом смешения жидкостей в трубопроводных системах является инжекция. Один из компонентов (оксигенат) вводится в смесительное устройство через цилиндрический канал, ось которого совпадает с осью смесительной камеры. Другой компонент (бензин) подается через кольцевой канал, соосный цилиндрическому (рис. 1).

При выполнении исследований предполагается, что смешение происходит без теплового взаимодействия и протекания химических реакций, компоненты смеси полностью смешиваются друг с другом. Коэффициент молекулярной диффузии кислорода в бензине полагался равным $D = 2.2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$. Плотность и молекулярная вязкость смеси определяется концентрацией компонентов:

$$\rho = \rho_{\text{ок}} M_{\text{ок}} + \rho_b (1 - M_{\text{ок}}), \quad \mu = \mu_{\text{ок}} M_{\text{ок}} + \mu_b (1 - M_{\text{ок}}). \quad (1)$$

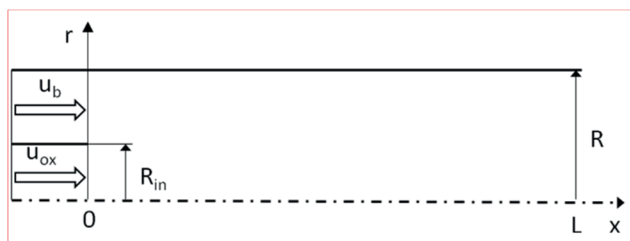


Рис. 1. Схема смешительного устройства

Для описания структуры потока используются двумерные осесимметричные уравнения Рейнольдса, записанные относительно осредненных по времени составляющих осевой u , радиальной v , составляющих скорости и давления p [2–5]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{\text{эфф}} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{\text{эфф}} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = & -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{\text{эфф}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{\text{эфф}} r \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] - 2 \frac{\mu_{\text{эфф}} v}{r^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Исследования характеристик турбулентности осуществлялось с использованием составной модели Ментера SST (Shear Stress Transport) [6, 7]:

$$\frac{\partial \rho u k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v k r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \tilde{G} - C_{\mu} \rho \omega k \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u \omega}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v \omega r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \sigma_{\omega} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + \sigma_{\omega} \mu_t) r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \\ + \left(\frac{\beta}{C_{\mu}} - \frac{\sigma_{\omega}}{\sqrt{C_{\mu}}} \mathcal{K}^2 \right) \frac{\rho}{\mu_t} \tilde{G} - \beta \rho \omega^2 + (1 - F_1) D_{k\omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для моделирования смешения используется уравнение турбулентной диффузии [8, 9]:

$$\frac{\partial \rho u M_{ox}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r M_{ox}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho D \frac{\partial M_{ox}}{\partial x} + J_x \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\rho D \frac{\partial M_{ox}}{\partial r} + J_r \right) \right] \quad (7)$$

В уравнении (7) $J_x = -\rho \langle u' M'_{ox} \rangle$, $J_r = -\rho \langle v' M'_{ox} \rangle$ – осевая и радиальная составляющие турбулентного диффузионного потока. Корреляции пульсаций скорости u' , v' и концентрации M'_{ox} определялись с использованием модели WET, разработанной Лаундером [10]. Согласно этой модели турбулентные диффузионные потоки полагаются пропорциональными скорости их генерации и могут быть найдены из решения системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -\rho \langle u' M'_{ox} \rangle &= C_{\phi 1} \rho \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\langle u' u' \rangle \frac{\partial M_{ox}}{\partial x} + \langle u' v' \rangle \frac{\partial M_{ox}}{\partial r} \right) + C_{\phi 2} \left(\langle u' M'_{ox} \rangle \frac{\partial u}{\partial x} + \langle v' M'_{ox} \rangle \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right], \\ -\rho \langle v' M'_{ox} \rangle &= C_{\phi 1} \rho \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\langle u' v' \rangle \frac{\partial M_{ox}}{\partial x} + \langle v' v' \rangle \frac{\partial M_{ox}}{\partial r} \right) + C_{\phi 2} \left(\langle u' M'_{ox} \rangle \frac{\partial v}{\partial x} + \langle v' M'_{ox} \rangle \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Турбулентные напряжения Рейнольдса определялись с использованием гипотезы Буссинеска [11–14]:

$$\begin{aligned} -\rho \langle u' u' \rangle &= -\frac{2}{3} \rho k + 2\mu_t \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\rho \langle u' v' \rangle = 2\mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ -\rho \langle v' v' \rangle &= -\frac{2}{3} \rho k + 2\mu_t \frac{\partial v}{\partial r} \end{aligned}$$

На входе в смеситель задается распределение скорости потока, концентрации и параметров турбулентности. Для осевого потока кислорода эти условия имеют вид:

$$x = 0, \quad r < R_{\text{in}} : u = u_{\text{ox}}, \quad v = 0, \quad k = \text{Tu} \cdot u_{\text{ox}}^2, \quad \omega = \frac{C_\omega \sqrt{\text{Tu}}}{R} u_{\text{ox}},$$

$$M_{\text{ox}} = 1.$$

Для потока бензина, подающегося в смеситель через кольцевой канал, граничные условия принимают вид:

$$x = 0, \quad R_{\text{in}} < r < R : u = u_{\text{b}}, \quad v = 0, \quad k = \text{Tu} \cdot u_{\text{b}}^2, \quad \omega = \frac{C_\omega \sqrt{\text{Tu}}}{R} u_{\text{b}},$$

$$M_{\text{ox}} = 0.$$

Величина скорости компонент на входе в смеситель определялась расходом модифицированной смеси Q , а также массовой долей кислорода \bar{M}_{ox} в готовой смеси:

$$u_{\text{ox}} = \frac{Q\bar{C}}{\pi\rho_{\text{ox}}R_{\text{in}}^2}, \quad u_{\text{b}} = \frac{Q}{\pi\rho_{\text{b}}(R^2 - R_{\text{in}}^2)}(1 - \bar{M}_{\text{ox}}).$$

В выходных сечениях смесителя граничные условия можно записать в виде:

$$x = L : \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M_{\text{ox}}}{\partial x} = 0.$$

На оси канала задаются условия симметрии:

$$r = 0 : \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial M_{\text{ox}}}{\partial r} = 0.$$

На стенках канала выполняются условия прилипания и непроницаемости, кинетическая энергия турбулентности полагается равной нулю:

$$r = R : \quad u = 0, \quad v = 0, \quad k = 0,$$

$$\frac{\partial M_{\text{ox}}}{\partial r} = 0.$$

Перейдем к анализу полученных результатов. При моделировании процесса смешения диапазон изменения параметров был выбран следующим: массовая доля оксигената в готовой смеси полагалась равной $\bar{M}_{\text{ox}} = 0.05$, плотность готовой смеси – $\rho = 782 \text{ кг/м}^3$, расход готовой смеси – $Q = 24.56 \text{ кг/с}$. Радиус смесительной камеры составлял $R = 0.1 \text{ м}$, длина смесителя – $L = 2 \text{ м}$. В процессе вычислений варьируются радиус осевого канала R_{in} и, соответственно, значения скоростей компонентов на входе в смеситель u_{ox} , u_{b} .

Рассмотрим сначала особенности смешения, когда скорости подачи компонентов смеси равны: $u_{\text{b}} = u_{\text{ox}}$ (рис. 2). Этот режим течения осуществляется, когда радиус осевого канала равен

$$R_{\text{in}} = R_* = \sqrt{\frac{\rho_{\text{b}} \bar{M}_{\text{ox}}}{\rho_{\text{b}} \bar{M}_{\text{ox}} + \rho_{\text{ox}} (1 - \bar{M}_{\text{ox}})}} R = 0.0224 \text{ м.}$$

В этом случае два потока, подаваемые в камеру, движутся как единое целое: движение жидкостей в радиальном направлении отсутствует, а линии тока параллельны оси течения.

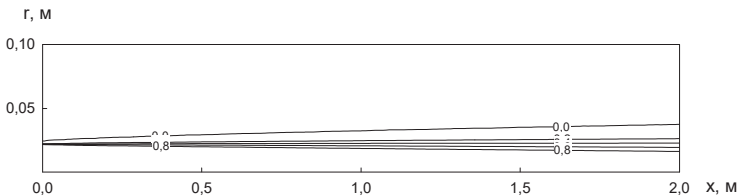


Рис. 2. Изолинии концентраций в смесительном устройстве: $Q = 24.56 \text{ кг/с}$,
 $\bar{M}_{\text{ox}} = 0.05$, $R_{\text{in}} = 0.0224 \text{ м}$

Основным механизмом, обеспечивающим смешение потоков, является диффузия. Вклад молекулярной диффузии в смешение потоков, как показывают проведенные оценки, является ничтожно малым. Влияние турбулентности на процесс смешения потоков также невелико, так как вследствие равенства

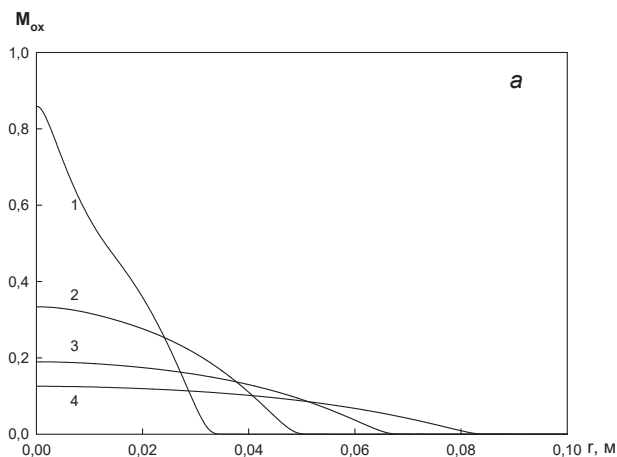
скоростей на границе потоков не происходит формирование сдвиговых напряжений и генерации турбулентности. В камере на границе потоков формируется достаточно узкий концентрационный слой смешения. Толщина слоя смешения увеличивается по мере удаления от входа. Внешняя граница этого слоя по мере удаления от входного сечения распространяется к стенкам камеры, внутренняя – к ее оси. Вне слоя смешения находятся несмешанные компоненты: во внутренней области оксигенат, во внешней – бензин. Интенсивность смешения потоков в смесительном устройстве для заданных режимных параметров и геометрических характеристик невысока.

Перейдем к рассмотрению случая $R_{in} < R_*$. В этом случае скорость оксигената на входе в смесительную камеру превышает скорость бензина. В результате вязкого взаимодействия более быстрые массы оксигената вовлекают в ускоренное движение внутренние слои кольцевого потока бензина. В результате происходит формирование динамического слоя смешения. На незначительном удалении от входного сечения структура потока характеризуется наличием центральной области, называемой ядром потока [15–17], в которой жидкость движется с одинаковой по сечению скоростью u_{ox} , зоны смешения, в которой происходит уменьшение скорости потока, и внешней зоны, в которой скорость остается равной u_b . Вблизи стенки камеры формируется область динамического пограничного слоя. С увеличением расстояния от входного сечения область влияния вязких сил увеличивается в размерах. Это приводит к росту как толщины динамического слоя смешения, так и толщины пограничного слоя. На значительном удалении от входа происходит динамическая стабилизация потока.

В слое смешения в результате различия скоростей потоков формируются сдвиговые напряжения, приводящие к генерации турбулентности. Область повышенной турбулентности зарождается на границе раздела сред. Затем, распространяясь вниз по потоку, она заполняет все сечение камеры смешения. Турбулентные пульсации скорости интенсифицируют смешение жидкостей и повышают качество смешения. Генерация

турбулентности в слое смешения происходит тем интенсивнее, чем больше различаются скорости потоков u_b/u_{ox} . Таким образом, основным процессом, определяющим смешение сред, становится турбулентная диффузия.

На рис. 3 представлены радиальные распределения массовой доли кислорода в различных сечениях камеры. На начальном участке течения радиальное распределение концентрации характеризуется резким скачком на границе потоков. Вниз по потоку в результате турбулентной диффузии происходит смешение компонентов, приводящее к выравниванию концентраций. Массовая доля кислорода в приосевой зоне уменьшается, а в слое смешения – растет. После того, как внешняя граница слоя смешения достигнет стенки камеры, происходит выравнивание массовых долей компонентов по всему сечению.



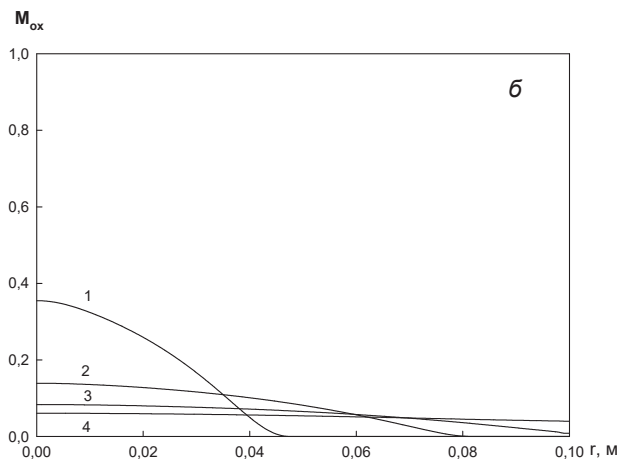


Рис. 6. Радиальное распределение массовой доли кислорода: а – $R_{in} = 0.015$ м, б – $R_{in} = 0.01$ м; 1 – $x = 0.216$ м, 2 – 0.47, 3 – 0.723, 4 – 0.977

С увеличением отношения u_b/u_{ox} толщина слоя смешения увеличивается. Внутренняя граница слоя смешения достигает оси канала на меньшем расстоянии от входного сечения. Распространение слоя смешения во внешнюю область вплоть до стенки камеры с ростом u_b/u_{ox} также интенсифицируется. В результате этого качество смешения компонентов с ростом u_b/u_{ox} улучшается.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90078.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов А.М. Применение присадок в топливах для автомобилей: Справ. Издание. Москва : Химия, 2000.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва : Наука, 1974.
3. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Туркасова Н.Г., Байгулова А.И. Исследование процесса модификации битума в инжекторном смесителе. // Вестник Томского гос. архитектурно-строительного ун-та. 2013. № 3 (40). С. 202–213.
4. Матвиенко О.В., Унгер Ф.Г., Базуев В.П. Математические модели производственных процессов для приготовления

- битумных дисперсных систем. Томск : Изд-во Томского гос. архитектурно-строительного ун-та, 2015.
5. Матвиенко, О.В., Агафонцева М.В. Численное исследование процесса дегазации в гидроциклонах. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2012. – № 4(20). – С. 107–118.
 6. Menter F.R. Zonal Two Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows. // AIAA Paper. 1993. Technical Report No. 93–2906.
 7. Базуев В.П., Матвиенко О.В., Вороненко В.Л. Моделирование процесса модифицирования битума в кавитационно-смесительном диспергаторе. // Вестник Томского гос. архитектурно-строительного ун-та. 2010. № 4 (29). С. 121–128.
 8. Launder B.E. Heat and Mass Transport. In Turbulence; Bradshaw P. Ed. ; Springer: Berlin, Germany, 1978.
 9. Launder B.E., Reece G. J., Rodi, W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 68. Pp. 537–566.
 10. Launder B.E. On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows. Trans. // ASME J. Heat Transfer. 1988. Vol. 110. Pp. 1112–1128.
 11. Piquet J. Turbulent Flows: Models and Physics. Berlin: Springer. 1999.
 12. Матвиенко О.В., Бубенчиков А.М. Математическое моделирование теплообмена и химического реагирования закрученного потока диссоциирующего газа. // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 1. С. 118–126.
 13. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Смирнова Н.Г., Пушкарева Г.В., Дюльзон Н.К. Исследование смешения коаксиальных закрученных потоков для приготовления битумных дисперсных систем. // Вестник Томского гос. архитектурно-строительного ун-та. 2014. № 3 (44). С. 123–134.
 14. Матвиенко О.В., Эфа А.К., Базуев В.П., Евтюшкин Е.В. Численное моделирование распада турбулентной струи в спутном закрученном потоке. // Известия высших учебных заведений. Физика. 2006. Т. 49. № 6. С. 96–107.
 15. Дик И.Г., Матвиенко О.В. Некоторые закономерности теплообмена внутренних закрученных потоков. // Известия СО АН СССР, Сер. техн. наук. 1989. Вып. 3. С. 40–43.
 16. Дик И.Г., Матвиенко О.В. Теплообмен и горение закрученного потока в реакторе идеального вытеснения. // Инженерно-физический журнал. 1990. Т. 60, № 2. С. 217–225.

17. *Матвиенко О.В. Исследование теплообмена и формирования турбулентности во внутреннем закрученном потоке жидкости при низких числах Рейнольдса. Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87, № 4. С. 908–918.*

Матвиенко Олег Викторович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета, matvolegv@mail.ru.

Ромашенко Владислава Анатольевна, аспирант кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета.

Исследование установившегося течения жидкости Рейнера – Ривлина в цилиндрической трубе

О.В. Матвиенко^{1,2}, Н.С. Фирсанова¹

¹ *Национальный исследовательский Томский государственный университет Томск.*

² *Томский государственный архитектурно-строительный университет Томск*

Аннотация. В работе проведено исследование расходных характеристик течения битумного вязущего, описываемого моделью Рейнера – Ривлина, в цилиндрической трубе. Для жидкости Рейнера – Ривлина в отличие от ньютоновской жидкости поверхности равного давления представляют собой параболоиды вращения с экстремальной точкой, локализованной на оси течения. Ветви параболы направлены в сторону возрастания осевой координаты. Давление на оси течения имеет минимальные значения и возрастает по мере приближения к стенке.

Ключевые слова: реология, битумные вязущие, вязкопластические среды, вязкость, неньютоновские жидкости.

В различных отраслях промышленности приходится иметь дело с неньютоновскими жидкостями, вязкость которых сильно зависит от распределения скорости течения и может сильно изменяться в технологическом процессе [1–5]. Для создания рекомендаций по оптимизации работы технологических устройств необходимо осуществить изучение особенностей течения неньютоновских сред.

Для описания деформационного поведения различных структурированных дисперсных сред существует множество реологических моделей, передающих в определенном диапазоне напряжений сдвига отдельные особенности реального течения [6–12].

Среди неньютоновских жидкостей особое место занимают изотропные реологически стабильные среды, у которых зависимость напряжений от скоростей деформаций является тензорно нелинейной [13–15]. В общем случае нелинейную

зависимость напряжений от скоростей деформаций можно записать в виде:

$$\sigma = f(\dot{\varepsilon}). \quad (1)$$

Принцип объективности и независимости функциональной зависимости от выбора системы координат требует, чтобы функция $f(\dot{\varepsilon})$ была изотропной. Этому свойству удовлетворяют функции вида:

$$\sigma = \sigma_0 E + \phi_1 \dot{\varepsilon} + \phi_2 \dot{\varepsilon}^2, \quad (2)$$

где E – единичный тензор, σ_0 , ϕ_1 , ϕ_2 – скалярные функции инвариантов тензора скоростей деформации:

$$I_1 = \dot{\varepsilon}_i^i, \quad I_2 = \dot{\varepsilon}_i^i \dot{\varepsilon}_j^j, \quad I_3 = \dot{\varepsilon}_j^i \dot{\varepsilon}_k^j \dot{\varepsilon}_i^k. \quad (3)$$

В покоящейся жидкости ($\dot{\varepsilon} = 0$) напряжения определяются полем гидростатического давления p . При этом согласно закону Паскаля выполняется соотношение

$$\sigma = -pE. \quad (4)$$

Таким образом, можно определить первый параметр реологического закона (2):

$$\sigma_0 = -p. \quad (5)$$

Частным случаем реологического соотношения (2) является модель Рейнера – Ривлина, в которой функции ϕ_1 , ϕ_2 заменяются на константы, характеризующие свойства среды. С учетом этих изменений для несжимаемой жидкости реологическое соотношение (2) в индексной форме можно записать как:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} + 4\gamma\dot{\varepsilon}_{ik}\dot{\varepsilon}_{kj}. \quad (6)$$

Широкое применение реологически сложных сред в химической, нефтехимической и пищевой промышленности обуславливает возрастающий интерес к изучению гидродинамики потока жидкостей Рейнера – Ривлина.

Настоящая работа является продолжением исследований течений неньютоновских сред в цилиндрических каналах [16–28]. Целью настоящей работы является исследование установившегося течения в цилиндрическом канале высокополимерных соединений, описываемых моделью Рейнера – Ривлина.

Рассмотрим течение в цилиндрическом канале высокополимерных соединений, описываемых моделью Рейнера – Ривлина. При построении математической модели были приняты следующие допущения: течение среды является установившимся, ламинарным, реологические свойства среды характеризуются наличием нелинейно вязких эффектов; плотность среды в ходе процесса меняется незначительно; силы тяжести пренебрежимо малы. Пусть ось трубы совпадает с осью x , радиальную координату r будем измерять от оси трубы.

Определим компоненты тензора скоростей деформаций. В случае осесимметричного прямого установившегося течения ($v_x = u(r)$, $v_r = 0$, $v_\phi = 0$) компоненты тензора скоростей деформации будут равны:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} &= 0, & \dot{\epsilon}_{xr} &= \dot{\epsilon}_{rx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r}, & \dot{\epsilon}_{x\phi} &= \dot{\epsilon}_{\phi x} = 0, \\ & & \dot{\epsilon}_{rr} &= 0, & & \\ \dot{\epsilon}_{r\phi} &= \dot{\epsilon}_{\phi r} = 0, & \dot{\epsilon}_{\phi\phi} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Определим компоненты девиатора напряжений $\tau_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} + 4\gamma\dot{\epsilon}_{ik}\dot{\epsilon}_{kj}$:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2, & \tau_{xr} &= \tau_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial r}, \\ & & \tau_{x\phi} &= \tau_{\phi x} = 0, \\ \tau_{rr} &= \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2, & \tau_{r\phi} &= \tau_{\phi r} = 0, \quad \tau_{\phi\phi} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для рассматриваемого течения уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, а уравнения движения принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (11)$$

Уравнение (9) позволяет найти радиальное распределение давления по известному профилю осевой скорости, уравнение (10) свидетельствует, что поле давления является осесимметричным. Радиальное распределение осевой скорости можно определить из решения уравнения (11).

Отметим, что при течении жидкости Рейнера – Ривлина поле давления зависит не только от осевой, но и от радиальной координаты. Это течение жидкости Рейнера – Ривлина отличается от течения ньютоновской жидкости, при котором в каждом поперечном сечении, перпендикулярном к оси трубы, давление можно рассматривать как постоянное.

Граничные условия для уравнения (11) имеют вид:

$$r = 0: \quad \frac{du}{dr} = 0, \quad r = R: \quad (12)$$

$$u = 0.$$

Интегрирование уравнения (11) с учетом граничных условий (12) позволяет определить радиальное распределение осевой скорости в канале:

$$u = \frac{1}{4\mu} \left. \frac{dp}{dx} \right| (R^2 - r^2). \quad (13)$$

Отметим, что радиальное распределение осевой скорости при установившемся течении жидкости Рейнера – Ривлина

описывается той же зависимостью, что и течение ньютоновской жидкости.

Определим распределение давления в потоке жидкости Рейнера –Ривлина. Для этого в уравнение движения (9) подставим зависимость (13), характеризующую распределение скорости потока по радиусу трубы. В результате интегрирования получим:

$$p = \frac{3}{8} \frac{\gamma}{\mu^2} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^2 r^2 - \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| x + p_0. \quad (14)$$

Определим теперь компоненты дивергента тензора напряжений в потоке. С учетом соотношений (8) эти компоненты равны:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{\gamma}{4\mu^2} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^2 r^2, \quad \tau_{xr} = \tau_{rx} = -\frac{1}{2} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| r, & \tau_{x\phi} = \tau_{\phi x} = 0, \\ \tau_{rr} &= \frac{\gamma}{4\mu^2} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^2 r^2, & \tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = 0, & \tau_{\phi\phi} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из формул (15) следует, что наряду со сдвиговыми напряжениями, линейно изменяющимися по радиусу, что характерно для ньютоновской жидкости, возникают дополнительные нормальные напряжения в осевом и радиальном направлениях.

Перейдем к анализу полученных результатов. При математическом моделировании диапазон изменения параметров был выбран следующим: сдвиговая вязкость изменялась в диапазоне – $\mu = 0.25 \div 4$ Па·с; сдвиговая вязкость – $\gamma = 0.25 \div 2$ Па·с²; плотность среды – $\rho = 1300$ кг/м³, перепад давления – $|\partial p / \partial x| = 250 \div 8000$ Па/м. Выбранный диапазон изменения параметров соответствует свойствам водного раствора гидросиетилцеллюлозы, применяемого в нефтяной и газовой промышленности в качестве добавки бурового раствора под названием. Радиус канала составлял $R = 0.1$ м.

Вследствие вязкости касательное напряжение передается от одного цилиндрического слоя к другому, пропорциональное градиенту скорости du/dr . Следовательно, движение каждого элемента жидкости ускоряется вследствие перепада давления и замедляется вследствие действия напряжения сдвига, вызванного вязкими силами. Скорость течения на стенках трубы вследствие прилипания равна нулю, в центре трубы она имеет наибольшее значение. В точках цилиндрических поверхностей с осями, совпадающими с осью трубы, скорость течения постоянна. Отдельные concentрические слои скользят один по другому и притом так, что скорость везде имеет осевое направление.

На рис. 1 представлены радиальные распределения скорости, рассчитанные для одного и того же значения сдвиговой вязкости μ , но различных перепадов давления. С ростом перепада давления увеличивается энергия, сообщаемая потоку. В результате этого скорость потока возрастает.

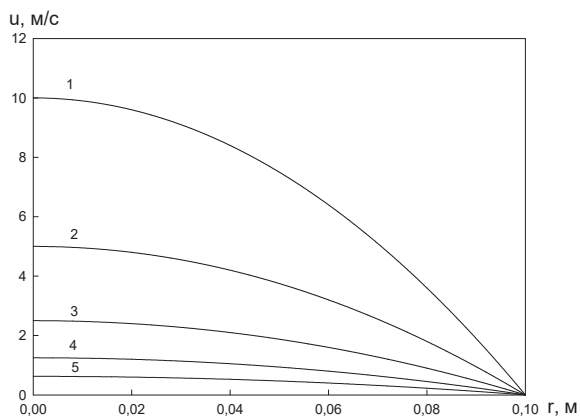


Рис. 1. Радиальное распределение скорости: $\mu = 1$ Па·с: 1 – $|\partial p / \partial x| = 4000$ Па/м, 2 – $|\partial p / \partial x| = 2000$ Па/м, 3 – $|\partial p / \partial x| = 1000$ Па/м, 4 – $|\partial p / \partial x| = 500$ Па/м, 5 – $|\partial p / \partial x| = 250$ Па/м

С увеличением значений сдвиговой вязкости среда становится менее подвижной. Это приводит к росту гидравлического сопротивления. В результате расход жидкости

уменьшается. При этом значения скорости уменьшаются по всему сечению трубы (рис. 2).

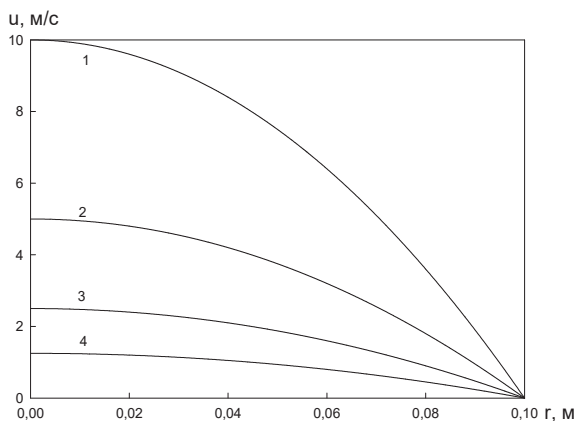


Рис. 2. Радиальное распределение скорости: $|\partial p / \partial x| = 2000 \text{ Па/м}$, 1 – $\mu = 0.5 \text{ Па}\cdot\text{с}$, 2 – $\mu = 1 \text{ Па}\cdot\text{с}$, 3 – $\mu = 2 \text{ Па}\cdot\text{с}$, 4 – $\mu = 4 \text{ Па}\cdot\text{с}$

Перейдем к анализу распределения давления в потоке жидкости Рейнера – Ривлина. На рис. 7 представлены изобары избыточного давления Δp , рассчитанные для различных значений осевого перепада давления $|\partial p / \partial x|$. Для жидкости Рейнера – Ривлина в отличие от ньютоновской жидкости поверхности равного давления представляют собой параболоиды вращения с экстремальной точкой, локализованной на оси течения. Ветви параболы направлены в сторону возрастания осевой координаты. Давление на оси течения имеет минимальные значения и возрастает по мере приближения к стенке. Вниз по потоку величина давления уменьшается. С увеличением значений $|\partial p / \partial x|$ неоднородность поля давления как в осевом направлении, так и в радиальном становится более выраженной. Увеличение значений поперечной вязкости приводит к большей радиальной неоднородности поля давления. При этом с ростом γ происходит увеличение давления у стенки.

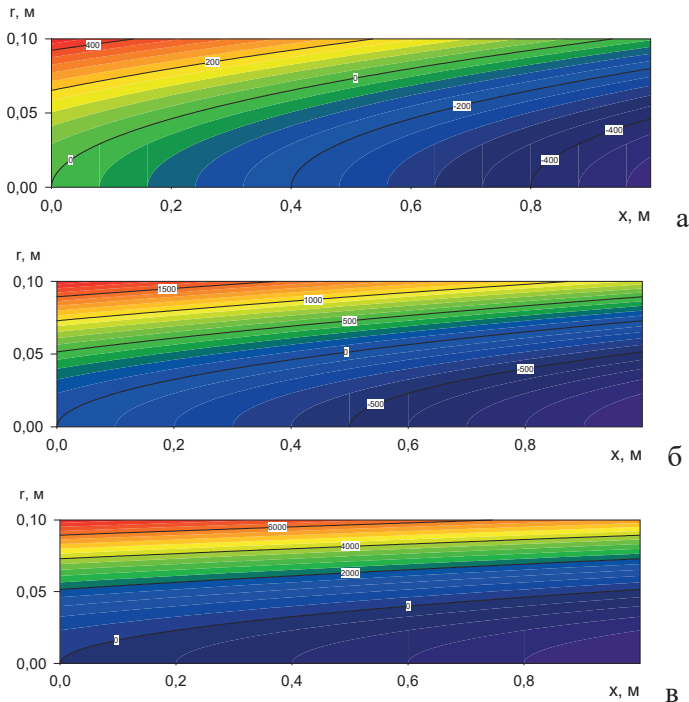


Рис. 3. Распределение давления в потоке: а: $\mu = 1 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\gamma = 0.25 \text{ Па}\cdot\text{с}^2$: 1 – $|\partial p/\partial x| = 250 \text{ Па/м}$, 2 – $|\partial p/\partial x| = 500 \text{ Па/м}$, 3 – $|\partial p/\partial x| = 1000 \text{ Па/м}$

Закключение

- С увеличением значений сдвиговой вязкости среда становится менее подвижной. Это приводит к росту гидравлического сопротивления. В результате расход жидкости уменьшается. При этом значения скорости уменьшаются по всему сечению трубы.
- Сдвиговые напряжения имеют отрицательные значения, что связано с действием вязких сил, приводящих к уменьшению скорости течения по мере приближения к стенке трубы. Абсолютная величина сдвиговых напряжений линейно возрастает от оси трубы, где сдвиговые напряжения равны нулю, до стенки, где абсолютная величина сдвиговых напряжений достигает наибольшего значения.

- В тензорно-нелинейных средах нормальные напряжения зависят не только от скорости деформации в осевом и радиальном направлениях, но также и от скорости сдвиговых деформаций.
- Величина нормальных напряжений оказывается пропорциональной квадрату осевой составляющей перепада давления и обратно пропорциональной квадрату сдвиговой вязкости.
- Для жидкости Рейнера – Ривлина в отличие от ньютоновской жидкости поверхности равного давления представляют собой параболоиды вращения с экстремальной точкой, локализованной на оси течения. Ветви параболы направлены в сторону возрастания осевой координаты. Давление на оси течения имеет минимальные значения и возрастает по мере приближения к стенке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уилкинсон У.Л. *Неньютоновские жидкости: Гидромеханика, перемешивание и теплообмен*. М. : Мир, 1964. 216 с.
2. Матвиенко О.В., Унгер Ф.Г., Базуев В.П. *Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем*. Томск : Изд-во Томского гос. архитектурно-строительного ун-та, 2015.
3. Малкин А.Я., Исаев А.И. *Реология: концепции, методы, приложения*. – СПб. : Профессия, 2007. – 560 с.
4. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Черкасов И. С., Асеева А.Е. *Веник В.Н. Течение битумного вязжущего, описываемого моделью Оствальда – де Вейля, в цилиндрической трубе*. // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2020. Т. 22. № 1. С. 171–192.
5. *Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред*. – СПб. : Наука, 2000. – 359 с.
6. Кутепов А.М., Полянин Л.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д. А. *Химическая гидродинамика: справочное пособие*. Москва : Бюро Квантум, 1996.
7. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Черкасов И.С., Литвинова А.Е. *Исследование гидравлических характеристик потока водно-песчаной суспензии в трубе*. // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2020. Т. 22. № 2. С. 129–144.
8. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Сабылина Н.Р., Асеева А.Е., Суртаева А.А. *Исследование установившегося течения*

- вязкопластического битумного вяжущего, описываемого моделью Шведова – Бингама, в цилиндрической трубе. // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2019. Т. 21. № 3. С. 158–177.
9. Матвиенко О.В. Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 99–112.
 10. Матвиенко О.В., Литвинова А.Е. Исследование установившегося течения высокопарафинистого битумного вяжущего, описываемого моделью Балкли –Гершеля, в цилиндрической трубе. // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2021. Т. 23. С.
 11. Матвиенко, О.В., Литвинова А.Е., Фирсанова Н.С. Исследование расходных характеристик установившегося течения высокопарафинистого битумного вяжущего в цилиндрической трубе. // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2021. – Т. 23. – № 5. – С. 71–85.
 12. Матвиенко О.В. Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале. // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57. № 8–2. С. 183–189.
 13. Скульский О.И., Аристов С.Н. Механика аномально вязких жидкостей. М. – Ижевск : РХД, 2004. 156 с.
 14. Хазем Али Аттия. Численное исследование течения и теплоотдачи к пористому диску, вращающемуся в жидкости Рейнера – Ривлина // ПМТФ, 2005, т. 46, № 1, с. 85–95.
 15. Литвинов В.Г. Движение нелинейно вязкой жидкости. М. : Наука, 1982. 374 с.
 16. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Южанова Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале. // Инженерно-Физический журнал. 2011. Т. 84, № 3. С. 544–547.
 17. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Южанова Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале. // Инженерно-Физический журнал. 2014. Т. 87, № 1. С. 192–199.
 18. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Дульзон Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале //

- Инженерно-физический журнал*. 2014. Т. 87. № 5. С. 1129–1137.
19. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале. // *Инженерно-физический журнал*. 2019. Т. 92. № 1. С. 215–226.
 20. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале. // *Инженерно-физический журнал*. 2019. Т. 92. № 6. С. 2641–2651
 21. Матвиенко О.В., Асеева А.Е. Математическое моделирование закрученного потока термовязкой псевдопластической жидкости Сиско в цилиндрическом канале. // *Инженерно-физический журнал*. 2020. Т. 93. № 4. С. 857–869.
 22. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Туркасова Н.Г., Байгулова А.И. Исследование процесса модификации битума в инжекторном смесителе. // *Вестник Томского гос. архитектурно-строительного ун-та*. 2013. № 3 (40). С. 202–213.
 23. Матвиенко О.В., Агафонцева М.В. Численное исследование процесса дегазации в гидроциклонах. // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2012. – № 4(20). – С. 107–118.
 24. Базуев В.П., Матвиенко О.В., Вороненко В.Л. Моделирование процесса модифицирования битума в кавитационно-смесительном диспергаторе. // *Вестник Томского гос. архитектурно-строительного ун-та*. 2010. № 4 (29). С. 121–128.
 25. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Смирнова Н.Г., Пушкарева Г.В., Дюльзон Н.К. Исследование смешения коаксиальных закрученных потоков для приготовления битумных дисперсных систем. // *Вестник Томского гос. архитектурно-строительного ун-та*. 2014. № 3 (44). С. 123–134.
 26. Матвиенко О.В., Эфа А.К., Базуев В.П., Евтюшкин Е.В. Численное моделирование распада турбулентной струи в спутном закрученном потоке. // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2006. Т. 49. № 6. С. 96–107.
 27. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Venik V.N., Smirnova N.G. Numerical investigation of Herschel - Bulkley fluids mixing. // В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Advanced Materials in Construction and Engineering. Сер. "International Scientific Conference of Young Scientists: Advanced Materials in Construction and Engineering, TSUAB 2014" 2015. С. 012034.

28. *Матвиенко О.В. Исследование теплообмена и формирования турбулентности во внутреннем закрученном потоке жидкости при низких числах Рейнольдса. // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 4. С. 908–918.*

Матвиенко Олег Викторович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета, matvolegv@mail.ru.

Фирсанова Наталья Сергеевна, аспирант кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета.

Оценка интенсивности радиоизлучения в окрестности фокуса параболического рефлектора

Л.С. Мищенко, М.С. Бухтяк

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. В работе предложен математический метод расчета интенсивности отраженного от орбитального рефлектора радиосигнала в окрестности его фокуса. В программном пакете Maple реализована процедура, принимающая на вход «облако точек» (получено на орбите лазерным теодолитом), а также параметры радиосигнала. Вычисление интенсивности отраженного сигнала выполнялось с использованием принципа Гюгенса – Френеля, статистического «метода двух сигм» и геометрических свойств параболического рефлектора. Результаты выполнения процедуры могут быть использованы для корректировки и юстировки приемника радиосигнала в орбитальных рефлекторах разного типа.

Ключевые слова: параболический рефлектор, орбитальный рефлектор, Maple, облако точек.

Введение. Орбитальные сетчатые рефлекторные антенны представляют собой крупную развертываемую конструкцию для работы на орбите. Точность поверхности и равномерность натяжения являются двумя важными показателями его корректной работы. В последние 10 лет наблюдается массовое появление публикаций, в которых описываются методы синтеза конструкций и форм орбитальных сетчатых рефлекторов с целью улучшения их характеристик [1–4, 6–8]. Методы математического моделирования также используются и для определения и предсказания пассивных интермодуляционных* помех рефлектора [5]. Интенсивные пассивные интермодуляционные помехи, создаваемые пассивными устройствами

* Интермодуляция – это процесс взаимодействия нескольких различных сигналов в нелинейных каскадах радиоприемного тракта. В результате возникают новые составляющие спектра, зашумляющие принимаемый сигнал. Пассивная интермодуляция возникает в узлах и конструкциях: в подложках печатных плат, в радиочастотных кабелях и соединителях, в антенных конструкциях и окружающих антенну предметах.

во всех системах спутниковой связи с большой пропускной способностью и большой мощностью, становятся одним из важных факторов при планировании использования спектра и оценке характеристик оборудования из-за нелинейного характера помех, материалов и металлических контактов.

Несовершенство формы орбитального рефлектора, вызванное шероховатостью поверхности, «матрасным эффектом» и температурными искривлениями рефлекторов в космических условиях заставляют развивать математические методы анализа формы рефлектора с целью улучшения его характеристик. В цикле работ [6–10] был предложен геометрический подход к моделированию формы тонкого упругого ортотропного материала, натянутого на замкнутый контур. Настоящая работа развивает предложенный ранее подход и направлена на разработку математического аппарата для поиска области наибольшей концентрации энергии волнового излучения, сфокусированного рефлектором, с учетом неидеальности рефлектора.

Методы. Объектом исследования в работе будет являться параболический рефлектор (рис.1), основные характеристики которого определяются диаметром апертуры D , фокусным расстоянием F , конструктивным параметром отражающей поверхности F/D^* , а также размером «шероховатостей».



Рис. 1. Рефлектор с приемником

В работе используется «облако точек», полученное в результате сканирования действующего орбитального рефлектора с помощью лазерного теодолита.

* Используется в инженерной практике.

В задачу проектирования орбитальных рефлекторов входит вопрос о наиболее выгодном расположении приемника, имея в виду наибольшую интенсивность принятого сигнала. Рефлектор фокусирует полученный сигнал на приемнике. Поверхность рефлектора представляет собой часть параболоида вращения, а значит, фокус параболоида будет (в идеале) являться фокусом рефлектора. Поэтому приемник располагают в фокальной точке рефлектора. На практике же шероховатости поверхности и искажения формы рефлектора, а также сдвиг фазы сигнала приводят к тому, что точка фокуса размывается до множества точек в окрестности фокуса.

В программном пакете Maple была разработана процедура, принимающая на вход частоту радиосигнала, радиус, фокусное расстояние и клиренс параболоида и «облако точек», соответствующих форме рефлектора с учетом всех его дефектов. Входное облако точек обрабатывается методом статистического анализа с целью удаления измерительных ошибок (так называемых выбросов). Вычисляется среднеквадратичное отклонение координат экспериментальных точек относительно идеального параболоида вдоль оси Oz . Отсевание производится по известному в статистике «критерию двух сигм». Так как реальная область приема сигнала есть пространственная область, окружающая фокальную точку рефлектора, необходимо вычислить интенсивность сигнала в окрестности фокуса родительского параболоида. Для этого фокальная точка окружается прямоугольным параллелепипедом, ребра которого параллельны координатным осям. Параллелепипед разделяется на сетку равномерным делением вдоль каждой координатной оси. Узлы сетки рассматриваются как точки, в которых фиксируется интенсивность сигнала рис. 2.

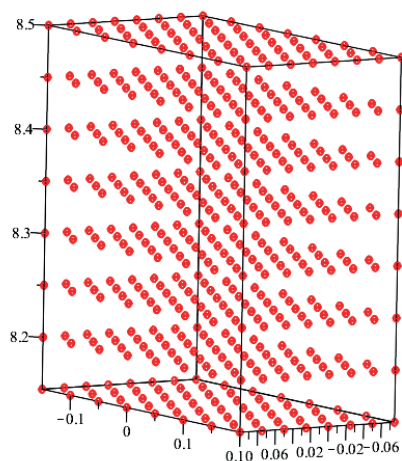


Рис. 2. Точки, в которых вычисляется интенсивность

Результатом работы программы является массив интенсивностей отраженного радиосигнала в окрестности фокуса. Блок-схема программы приведена на рис. 3.



Рис. 3. Блок-схема разработанной процедуры

Результаты. Процедура вычисляет интенсивность радиосигнала гармонической сферической волны, принятого в окрестности фокуса рефлектора. Источник предполагается удаленным настолько, что фронт волны моделируется плоскостью. Когда фронт волны достигает точки (одну из «облака точек»), она становится источником волны.

Пусть источник волны находится в точке T , а отражение волны происходит в точке M . Единичный нормальный вектор фронта волны обозначим N . Тогда, вводя углы u и v , запишем

$$N := [\cos(v) \cdot \sin(u), \sin(v) \cdot \sin(u), \cos(u)],$$

в процедуру входит 5 параметров: w , T , M , u , v :

w – число полных волн на метр длины;

T – период колебаний волны;

M – координаты точки, в которых происходит отражение.

Для дальнейшего описания рассмотрим тот частный случай обсуждаемой конструкции, когда нормальный вектор фронта волны лежит в плоскости, проведенной через ось параболоида. В сечении этой плоскости фронт волны – некоторая прямая L , а ее нормальный вектор (он же нормальный вектор фронта волны) имеет вид

$$\vec{n} = \{\sin \varphi, \cos \varphi\}.$$

Отсчет пути, пройденного волной, будет вестись от прямой L . Фронт волны движется, оставаясь ортогональным к вектору \vec{n} .

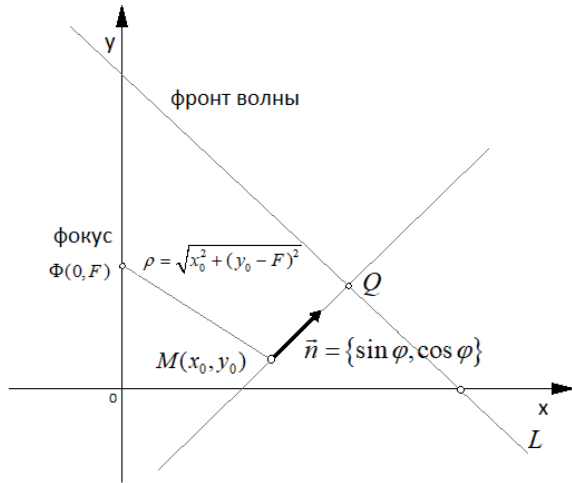


Рис. 4. Схема отражения сигнала, приходящего под углом от экспериментальной точки

Импульс доходит до точки $M(x_0, y_0)$. Точка M – произвольная точка из «облака» и прошедшая процедуру отсеивания – в данном случае выступает центром отражения радиоволн. Отражение в ней происходит по закону Френеля. Точка $F(0, F)$ – фокусная точка рефлектора, а вспомогательная точка Q принадлежит L – фронту волны. Тогда путь, пройденный сигналом, равен

$$f = |QM| + |MF|.$$

Уравнение прямой L имеет вид

$$x \sin \varphi + y \cos \varphi = p. \quad (1)$$

Здесь p – некоторая константа. Уравнение прямой m , проведенной через точку (x_0, y_0, z_0) и ортогональной фронту волны:

$$m: \begin{cases} x = x_0 + \lambda \sin \varphi \\ y = y_0 + \lambda \cos \varphi \end{cases}. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1)

$$(x_0 + \lambda \sin \varphi) \sin \varphi + (y_0 + \lambda \cos \varphi) \cos \varphi = p$$

$$x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi + \lambda (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \cos \varphi = p$$

$$\lambda = p - x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi$$

Так как $|\vec{n}| = 1$, поэтому $|\overline{MQ}| = \lambda = p - x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi$.

В качестве p возьмем фокальный параметр F

$$f = \rho + F - x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi.$$

Ясно, что при рассмотрении пространственной (истинной) конструкции мы имеем дело с нормальным вектором \vec{n} , определяемым двумя направляющими углами.

Применим рассмотренный алгоритм для того случая, когда фронт волны ортогонален оси параболоида. Для значений конструктивных параметров

- $F = 8,3$ (м)
- $R = 6,0$ (м)
- $K = 2,3$ (м)
- Длина волны = 0.03 (м)

В результате вычислений строится оценка интенсивности сигнала, принимаемого в каждой точке «мишени». Этих точек 216. Мы не приводим эти значения, ограничиваемся изображением эллипсоида, в точках которого сосредоточится 94,5 % интенсивности сигналов, отраженных точками «облака» (рис. 5).

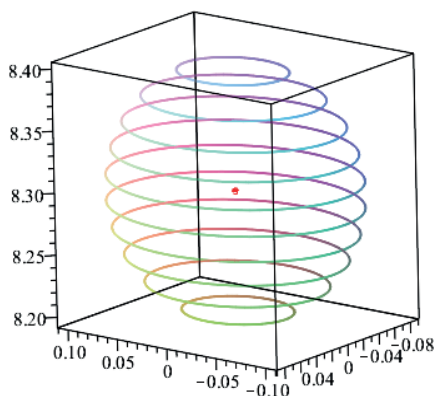


Рис. 5. Пространственная модель интенсивностей

Подробность картины приема сигнала в точках «мишени» зависит от шага, с которым происходит разбиение параллелепипеда в окрестности фокуса параболического рефлектора, а также от количества и качества исходных данных.

Заключение. Предложенный в работе математический метод основан на принципе Гюенса – Френеля, а также геометрических свойствах параболоида вращения. Предполагается, что фронт падающей волны является плоским. Погрешность модели зависит от шага, с которым происходит разбиение параллелепипеда в окрестности фокуса параболического рефлектора, а также от количества и качества исходных данных. В Maple была разработана процедура для вычисления интенсивности отраженного радиосигнала в окрестности фокуса орбитального рефлектора. Предложенный метод и процедура могут быть использованы для юстировки и корректировки положения приемника радиосигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nie R. et al. *Integrated form finding method for mesh reflector antennas considering the flexible truss and hinges* // *Aerospace Science and Technology*. – 2019. – Т. 84. – С. 926–937.
2. Azhevsky Y.A. *Working efficiency analysis of space mirror antenna reflector made of composite materials* // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – IOP Publishing, 2021. – Т. 1060. – №. 1. – С. 012027.
3. Yuan P. et al. *Topology generation and optimization of boundary cable nets for the mesh reflector antenna* // *Engineering Structures*. – 2021. – Т. 229. – С. 111630.

4. Fonseca N. J. G., Girard E., Legay H. Doubly curved reflector design for hybrid array fed reflector antennas // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2018. – Т. 66. – N 4. – С. 2079–2083.
5. Wu D. et al. Prediction of passive intermodulation on mesh reflector antenna using collaborative simulation: Multiscale equivalent method and nonlinear model // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2017. – Т. 66. – N 3. – С. 1516–1521.
6. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2017. – № 45. – С. 5–24.
7. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскрыя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2015. – № 2 (34). – С. 5–17.
8. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // *Математическое моделирование*. – 2016. – Т. 28. – № 1. – С. 97–106.
9. Бухтяк М.С., Никульчиков А.В. Моделирование деформации сотовой панели // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2013. – № 2 (22). – С. 5–16.
10. Бухтяк М.С. Конечно-элементная модель псевдоминимальной поверхности // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2017. – № 48. – С. 5–16.

Бухтяк Михаил Степанович, канд. физ.-мат. наук, доцент, Национальный исследовательский Томский государственный университет, bukhtyakm@mail.ru.

Мищенко Любовь Сергеевна, магистрант, Национальный исследовательский Томский государственный университет, lyubmishenko@yandex.ru.

Решение больших систем линейных алгебраических уравнений с использованием параллельных технологий программирования

И.А. Подтихов, А.В. Старченко

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. На сегодняшний день существует множество методов решений СЛАУ. Эти методы бывают аналитическими и численными. В свою очередь, численные методы делятся на прямые и итерационные. В данной работе описаны следующие итерационные методы: метод сопряженных градиентов (CG) и стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab). Были проведены анализ и сравнение разработанных программных реализаций данных методов. Проведено их распараллеливание с помощью стандартов OpenMP и OpenACC. Также в работе описано использование операции предобуславливания.

Ключевые слова: численное решение СЛАУ, BiCGStab, параллельное программирование, OpenMP, OpenACC.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – одна из наиболее часто встречающихся задач в различных разделах современной математики. Это одна из классических задач линейной алгебры. Кроме того, СЛАУ и методы их решения играют важную роль во многих прикладных направлениях математики. Например, к решению СЛАУ больших размерностей сводятся многие задачи математической физики при применении к ним разностных методов.

Цель данной работы – решить СЛАУ с матрицей коэффициентов размера $10^6 \times 10^6$, используя программные стандарты для параллельного программирования OpenMP и OpenACC; применить предобуславливание для используемых численных методов решения СЛАУ.

Математическая постановка задачи

Как уже было сказано выше, к решению СЛАУ сводятся некоторые дифференциальные уравнения при применении к ним разностных методов. Рассмотрим это на примере.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

где $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $u_r = 0$ – граничное условие. Видно, что при $\alpha = 0$ оно является уравнением Пуассона.

Заменим эту задачу разностной, стремясь к тому, чтобы найти решения в точках (x_i, y_j) , $x_i = ih$, $y_j = jh$, $h = \frac{1}{N+1}$ и $i = 0, \dots, N+1$, $j = 0, \dots, N+1$. Обозначим $u_{i,j} \approx u(ih, jh)$ и аппроксимируем производные:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i, y=y_j} &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}; \\ \left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right|_{x=x_i, y=y_j} &\approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}; \\ \left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{x=x_i, y=y_j} &\approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j}}{h^2}. \end{aligned}$$

Получим СЛАУ:

$$(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \alpha(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j}) = h^2 f(ih, jh),$$

где $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, $0 \leq \alpha \leq 1$. В матрично-векторном виде данная СЛАУ будет выглядеть следующим образом (для $N = 3$):

$$\begin{pmatrix}
 -4+\alpha & 1-\alpha & 0 & 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4+\alpha & 1-\alpha & 0 & 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4+\alpha & 0 & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -4+\alpha & 1-\alpha & 0 & 1-\alpha & \alpha & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -4+\alpha & 1-\alpha & 0 & 1-\alpha & \alpha \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4+\alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4+\alpha & 1-\alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4+\alpha & 1-\alpha \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4+\alpha
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_{1,1} \\
 u_{1,2} \\
 u_{1,3} \\
 u_{2,1} \\
 u_{2,2} \\
 u_{2,3} \\
 u_{3,1} \\
 u_{3,2} \\
 u_{3,3}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 h^2 f_{1,1} \\
 h^2 f_{1,2} \\
 h^2 f_{1,3} \\
 h^2 f_{2,1} \\
 h^2 f_{2,2} \\
 h^2 f_{2,3} \\
 h^2 f_{3,1} \\
 h^2 f_{3,2} \\
 h^2 f_{3,3}
 \end{pmatrix}$$

Определение 1. Разреженная матрица – это матрица с преимущественно нулевыми элементами. В противном случае, если большая часть элементов матрицы являются ненулевыми, то матрица считается плотной.

Видно, что в данной СЛАУ матрица коэффициентов является разреженной.

Рассмотрим для данной СЛАУ два частных случая:

$$\begin{aligned}
 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) &= h^2 f_{i,j}, \\
 i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N;
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \\
 + 0,5(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j}) &= h^2 f_{i,j}, \\
 i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N;
 \end{aligned} \tag{2}$$

Если записать данные СЛАУ в матричном виде, то можно заметить, что матрица коэффициентов в системе (2) является несимметричной, в отличие от системы (1).

Разработать программы для численного решения систем (1) и (2) при различном размере матрицы коэффициентов, используя технологии параллельных вычислений, – это и есть основная цель данной работы.

Численные методы решения СЛАУ

Для решения данных СЛАУ выбраны наиболее популярные для больших СЛАУ итерационные методы: метод сопряженных градиентов (CG) и стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab). Одно из основных различий данных методов в том, что метод CG используется в случаях, когда матрица коэффициентов A – действительная симметричная положительно определенная матрица. На метод BiCGStab такие условия не накладываются.

Теорема 1. Пусть A – действительная симметричная положительно определенная матрица размера n . Тогда метод CG сходится не более, чем за n итераций.

Алгоритм метода CG [3, с. 217]:

1) выберем начальное приближение x_0

$$2) r_0 = b - Ax_0$$

$$3) p_0 = r_0$$

do ($j = 0, 1, \dots$)

$$1) \alpha_j = \frac{(r_j, r_j)}{(Ap_j, p_j)}$$

$$2) x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j$$

$$3) r_{j+1} = r_j - \alpha_j Ap_j$$

$$4) \beta_j = \frac{(r_{j+1}, r_{j+1})}{(r_j, r_j)}$$

$$5) p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j$$

while не выполняется *критерий остановки*.

Алгоритм метода BiCGStab [3, с. 268]:

- 1) выберем начальное приближение x_0
- 2) $r_0 = b - Ax_0$
- 3) $r_0^* = r_0$
- 4) $p_0 = r_0$
- do ($j = 0, 1, \dots$)
 - 1) $\alpha_j = \frac{(r_j, r_0^*)}{(Ap_j, r_0^*)}$
 - 2) $s_j = r_j - \alpha_j Ap_j$
 - 3) $\omega_j = \frac{(As_j, s_j)}{(As_j, As_j)}$
 - 4) $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j + \omega_j s_j$
 - 5) $r_{j+1} = s_j - \omega_j As_j$
 - 6) $\beta_j = \frac{(r_{j+1}, r_0^*) \alpha_j}{(r_j, r_0^*) \omega_j}$
 - 7) $p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j (p_j - \omega_j Ap_j)$

while не выполняется *критерий остановки*.

В обоих методах в качестве критерия остановки использовалось следующее неравенство: $\|r_{j+1}\| < \varepsilon$.

Предобуславливание

Определение 3. Предобуславливание – процесс преобразования условий задачи для ее более корректного численного решения. Предобуславливание обычно связано с уменьшением числа обусловленности задачи. Предобуславливаемая задача обычно затем решается итерационным методом.

В СЛАУ предобуславливание происходит путем перехода от исходной системы $A\bar{x} = \bar{b}$ к эквивалентной системе $M^{-1}A\bar{x} = M^{-1}\bar{b}$, где матрица M – так называемый предобуславливатель.

Предобуславлявателей существует довольно много. Все они в той или иной степени улучшают характеристики матрицы A , влияющие на скорость решения СЛАУ. Алгоритмы методов с предобуславливанием обычно слегка отличаются от исходных. В данной работе использовался довольно простой предобуславливатель $M = \text{diag}(A)$.

Алгоритм BiCGStab с предобуславливателем [5, с. 198]:

- 1) выберем начальное приближение x_0
- 2) $r_0 = b - Ax_0$
- 3) $r_0^* = r_0$
- 4) $p_0 = r_0$
- do ($j = 0, 1, \dots$)
 - 1) $y_j = M^{-1}p_j$
 - 2) $\alpha_j = \frac{(r_j, r_0^*)}{(Ap_j, r_0^*)}$
 - 3) $s_j = r_j - \alpha_j Ay_j$
 - 4) $z_j = M^{-1}s_j$
 - 5) $\omega_j = \frac{(Az_j, s_j)}{(Az_j, Az_j)}$
 - 6) $x_{j+1} = x_j + \alpha_j y_j + \omega_j z_j$
 - 7) $r_{j+1} = s_j - \omega_j Az_j$
 - 8) $\beta_j = \frac{(r_{j+1}, r_0^*)}{(r_j, r_0^*)} \alpha_j$
 - 9) $p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j (p_j - \omega_j Ap_j)$

while не выполняется критерий остановки.

Результаты вычислений

Вычислительные эксперименты проводились на ЭВМ со следующими характеристиками:

Центральный процессор: *Intel Xeon Silver 4214 CPU @ 2.20Ghz*
(ядер: 12, потоков: 24)

Видеокарта: *NVIDIA GeForce RTX 2080 Ti*

ОЗУ: *187 GB*

Численные эксперименты проводились со следующими параметрами:

$n = 10^6$ – размер матриц коэффициентов;

$\varepsilon = 10^{-5}$ – точность вычислений;

в качестве начального приближения x_0 был взят нулевой вектор.

В качестве компилятора для последовательных программ и с OpenMP использовался Intel C++ Compiler. Для программ с OpenACC использовался PGI Compiler.

Последовательные вычисления

Для СЛАУ (1):

Метод:	CG	BiCGStab
Время выполнения (сек.):	15,55	27,05
Количество итераций:	1573	1114

Для СЛАУ (2):

Метод:	CG	BiCGStab
Время выполнения (сек.):	решение не получено	49,03
Количество итераций:		2075

Для СЛАУ (1) с предобуславливанием:

Метод:	BiCGStab с предобуславливанием
Время выполнения (сек.):	26,91
Количество итераций:	987

Параллельные вычисления

Определение 4. Ускорение параллельной программы (алгоритма), получаемое при запуске на системе с p процессорами, – это

$$S_p = \frac{T_1}{T_p},$$

где T_1 – время выполнения программы на одном процессоре; T_p – время выполнения программы на системе из p процессоров [1, с. 14].

Определение 5. Эффективность использования параллельной программой ресурсов многопроцессорной вычислительной системы при решении задачи определяется отношением

$$E_p = \frac{S_p}{p}.$$

При создании высокопроизводительных программ необходимо стремиться к тому, чтобы $S_p \rightarrow p$ и $E_p \rightarrow 1$ [1, с. 14–15].

Вычисления производились для СЛАУ (1). Время оценивалось по трем запускам параллельной программы (среднее).

Метод CG (с использованием OpenMP):

p – кол-во нитей	Количество итераций	Время выполнения (сек.)	S_p	E_p
1	1573	15,55	1	1
2	1573	6,71	2,32	1,16
4	1573	4,26	3,65	0,91
8	1573	2,41	6,45	0,81
16	1573	2,13	7,30	0,46
32	1573	1,88	8,27	0,26
48	1573	1,85	8,40	0,18

Метод BiCGStab (с использованием OpenMP):

p – кол-во нитей	Количество итераций	Время выполнения (сек.)	S_p	E_p
1	1114	27,05	1	1
2	1059	14,02	1,93	0,97
4	1125	8,71	3,10	0,78
8	1367	6,58	4,11	0,51
16	1160	4,94	5,48	0,34
32	1229	5,06	5,35	0,17
48	1503	4,49	6,02	0,13

С использованием OpenACC:

Метод:	CG	BiCGStab
Время выполнения (сек.):	0,62	1,04
Количество итераций:	1573	1170

Заключение

В результате выполнения данной работы можно сделать вывод, что с помощью метода CG решение СЛАУ с симметричной матрицей коэффициентов можно получить быстрее, чем с помощью метода BiCGStab. Объясняется это тем, что в методе CG используется меньше операций на одну итерацию, чем в методе BiCGStab. Однако для СЛАУ с несимметричной матрицей коэффициентов необходимо

использовать метод BiCGStab, т. к. данный тип СЛАУ не удовлетворяет условиям сходимости метода CG.

С помощью предобуславливания удалось уменьшить число итераций, но время выполнения программы почти не изменилось, поскольку в алгоритм метода с предобуславливанием, напротив, были добавлены операции. При применении же иных предобуславливателей можно добиться более высоких результатов.

С помощью применения параллельных технологий программирования удалось ускорить решение задачи как с использованием метода CG, так и с использованием метода BiCGStab. В случае использования OpenMP видно, что с числом роста параллельных процессов уменьшается эффективность использования параллельной программой ресурсов вычислительной системы.

С помощью использования технологии OpenACC удалось добиться лучших результатов ускорения по времени, вследствие чего можно сделать вывод, что графические процессоры и данная технология подходят для параллельных вычислений лучше, чем центральные процессоры и технология OpenMP.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старченко А.В., Берцун В.Н. Методы параллельных вычислений: Учебник. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2013. – 223 с. (Серия «Суперкомпьютерное образование»).
2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. Пер. с англ. – М. : Мир, 2001. – 430 с., ил.
3. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем: Учеб. Пособие. – В 2-х томах. Том 1 / Пер. с англ.: Х.Д. Икрамов; Предисл.: В.А. Садовничий – М. : Издательство Московского университета, 2013. – 344 с., ил. – (Серия «Суперкомпьютерное образование»).
4. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений: учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. / под ред. А.В. Старченко. – Томск : Издательский Дом ТГУ, 2014. – 764 с.
5. Марчевский И.К., Пузикова В.В. Сравнение эффективности решателей разреженных систем линейных алгебраических уравнений на основе методов BiCGStab и FGMRES. Труды ИСП РАН, том 30, вып. 1, 2018 г., с. 195–214.

Старченко Александр Васильевич, д. ф.-м. н., проф., зав. кафедрой
вычислительной математики и компьютерного моделирования ММФ ТГУ,
starch@math.tsu.ru.

Влияние определяющих параметров на зарядку/разрядку теплового аккумулятора на основе пористых сред

А.П. Порунова, М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. Цель теплового управления состоит в том, чтобы гарантировать поддержание температуры каждого компонента в электронной системе в заданных рабочих пределах и обеспечить усиление теплопередачи с принудительной конвекцией во многих технических приложениях, таких как ядерное охлаждение и солнечные коллекторы. В таких случаях традиционной технологии охлаждения недостаточно, поэтому требуется более эффективный метод охлаждения. Одним из самых эффективных и перспективных способов усиления процессов теплообмена является использование в теплообменных устройствах пористых материалов. Данная работа посвящена математическому моделированию конвективного теплопереноса вязкой несжимаемой жидкости внутри прямоугольного канала при наличии пористой вставки.

Ключевые слова: пористая вставка, вынужденная конвекция, аккумулялирование энергии.

В данной работе исследуется процесс конвективного теплопереноса вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале высоты H и длины L с адиабатическими стенками с пористой вставкой в средней части (рис. 1). На входе в канал подается поток с начальной скоростью u_0 и начальной температурой T_h .

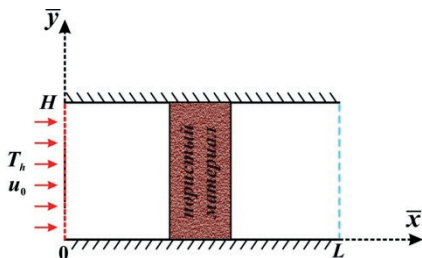


Рис. 1. Область решения задачи

Дифференциальные уравнения, описывающие анализируемый процесс в безразмерных переменных «функция тока – завихренность – температура», имеют следующий вид [1]:
– для чистой среды

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (3)$$

– для пористой среды

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (4)$$

(5)

$$\varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon^2}{\text{Re Da}} \Omega -$$

$$- \frac{c_F \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\text{Da}}} \Omega \sqrt{U^2 + V^2} - \frac{c_F \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\text{Da}} \sqrt{U^2 + V^2}} \left(V^2 \frac{\partial V}{\partial X} - U^2 \frac{\partial U}{\partial Y} + 2UV \frac{\partial U}{\partial X} \right) \quad (5)$$

$$\frac{(\rho c)_m}{(\rho c)_f} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{\lambda_m / \lambda_f}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (6)$$

Здесь $\text{Re} = \frac{Hu_0}{\nu}$ – число Рейнольдса, $\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$ – число Прандтля.

Безразмерные начальные условия для системы уравнений имеют вид:

$$\tau = 0; \quad \Psi = \Omega = \Theta = 0. \quad (7)$$

Безразмерные граничные условия имеют вид:

$$\tau > 0; \quad \Omega = 0; \quad \Theta = 1; \quad \Psi = Y \text{ при } X = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \text{ при } X = \frac{L}{H} = A;$$

$$\Psi = 0; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \text{ при } Y = 0;$$

$$\Psi = 1; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{при } Y = 1;$$

На границе пористого материала и чистой среды:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_f = \Theta_{pm} \\ \frac{\partial \Theta_f}{\partial n} = \frac{\lambda_{pm}}{\lambda_f} \frac{\partial \Theta_{pm}}{\partial n} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_f = \Psi_{pm} \\ \frac{\partial \Psi_f}{\partial n} = \frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial n} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_f = \Omega_{pm} \\ \frac{\partial \Omega_f}{\partial n} = \frac{\partial \Omega_{pm}}{\partial n} \end{array} \right.$$

Уравнения Пуассона для функции тока (1) и (4) решались методом конечных разностей с последующим применением метода последовательной верхней релаксации [2, 3]. Уравнения параболического типа (2), (3) для чистой среды и (5), (6) для пористой среды были решены с использованием локально-одномерной схемы А.А. Самарского [4].

Разработанный численный алгоритм был протестирован на следующих модельных задачах: течение Пуазейля в плоском канале и неизотермическое течение и теплообмен в плоском канале, где полученные результаты сравнивались с результатами [5] (рис. 2).

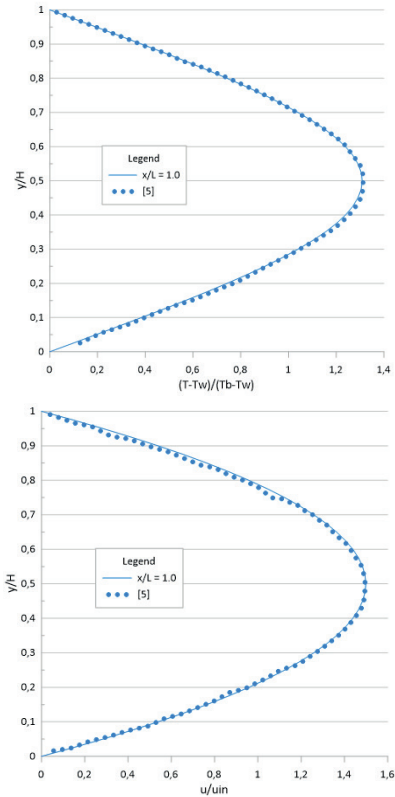


Рис. 2. Сравнение результатов тестовой задачи

Был проведен численный анализ влияния определяющих параметров (скорость набегающего потока, пористость и проницаемость вставки) на особенности зарядки и разрядки теплового аккумулятора, основанного на использовании пористого материала.

Режим зарядки предполагает подачу в канал горячей среды (воздух), температура которой $\Theta = 1$. Режим разрядки – в канал сразу после режима зарядки запускается холодная среда с температурой $\Theta = 0$.

В качестве параметра, характеризующего теплоаккумулирование, была взята средняя температура пористого материала.

Анализ проводился в широком диапазоне изменения определяющих параметров: $Re = 50-200$ (рис. 3), $Da = 10^{-4}-10^{-2}$ (рис. 4), $\varepsilon = 0,1-0,8$ (рис. 5). Число Прандтля было зафиксировано $Pr = 0,7$.

Представленные распределения (рисунки 3–5) иллюстрируют возможности аккумулирования и передачи энергии за счет использования пористой вставки.

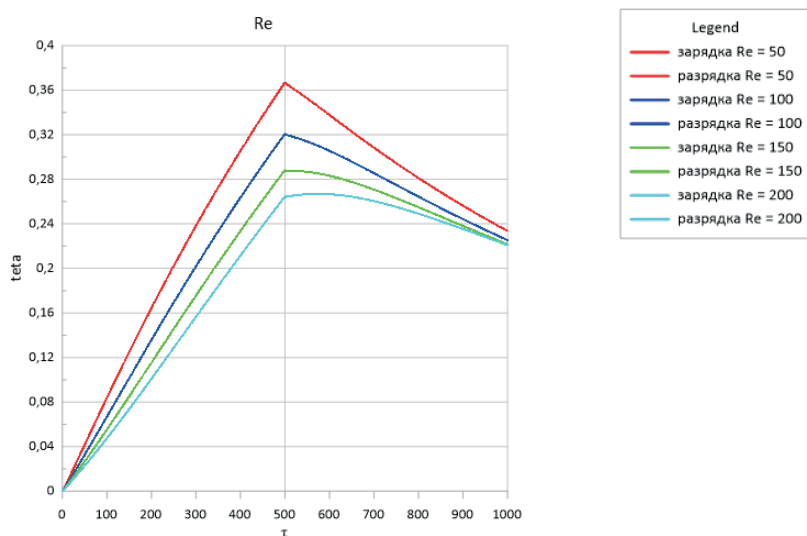


Рис. 3. Влияние Re на аккумулирование тепловой энергии в режимах зарядки и разрядки

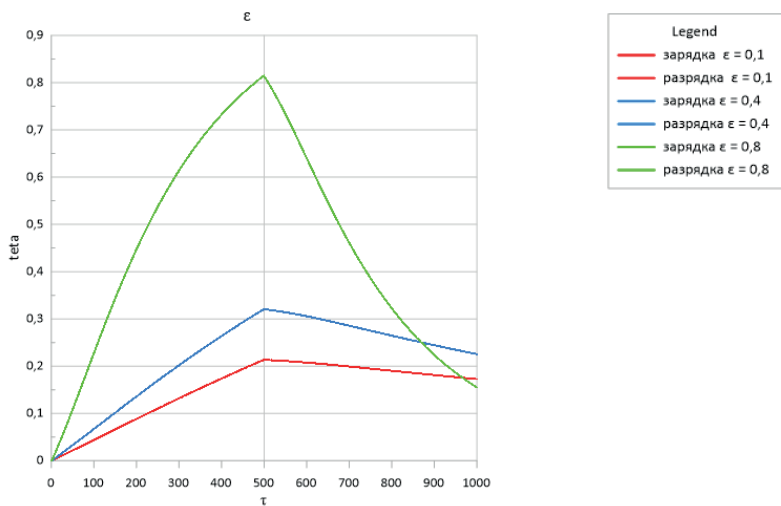


Рис. 4. Влияние ϵ на аккумуляцию тепловой энергии в режимах зарядки и разрядки

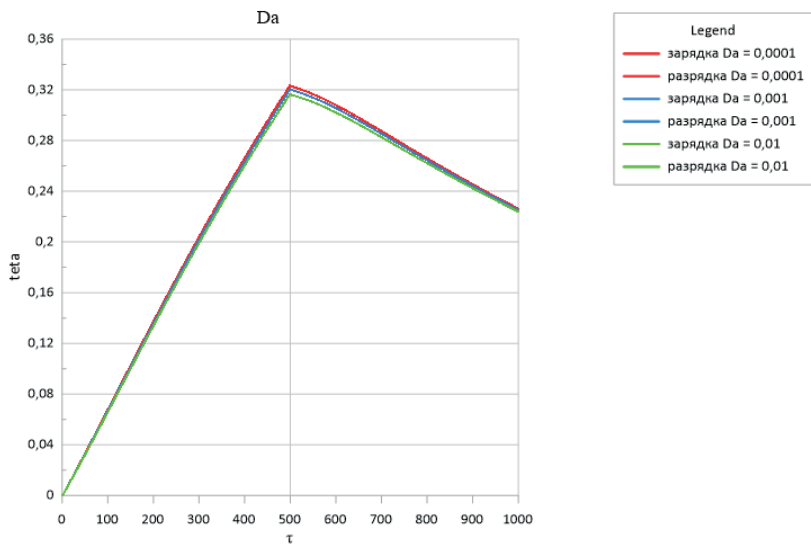


Рис. 5. Влияние Da на аккумуляцию тепловой энергии в режимах зарядки и разрядки

Заключение. По полученным результатам можно сделать вывод о том, что с увеличением числа Рейнольдса наблюдается менее интенсивное аккумулирование тепловой энергии в режиме зарядки и менее интенсивный нагрев теплоносителя в режиме разрядки. Увеличение пористости и уменьшение проницаемости материала теплового аккумулятора иллюстрируют более интенсивное аккумулирование тепловой энергии и более интенсивный теплосъем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. – М. : Наука, 1987. – 830 с.
2. Шеремет М.А. *Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения*. – Берлин : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 176 с.
3. Пасконов В.М. *Численное моделирование процессов тепло- и массообмена: [Учебное пособие по специальностям «Прикладная математика», «Физика» и «Механика»] / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов*. – М. : Наука, 1984. – 285 с.
4. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. – М. : Наука, 1977. – 656 с.
5. G.H. Tang, W.Q. Tao, Y.L. He, *Simulation of fluid and heat transfer in a plane channel using the lattice Boltzmann method*, *Internat. J. Modern Phys. B* 17 (2003) 183–187.

Порунова Анастасия Павловна, студентка ММФ ТГУ, nastya.p-va@yandex.ru.

Шеремет Михаил Александрович, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой теоретической механики ММФ ТГУ, sheremet@math.tsu.ru.

Построение регрессионной модели числа самоубийств от социально-экономических факторов с использованием регуляризации

М.А. Пурясева

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. В данной статье представлено построение многомерных линейных регрессионных моделей тремя методами: наименьших квадратов, Ridge и Lasso. Для полученных значений параметров были построены доверительные интервалы двух типов: классические и с применением бустрапа.

Ключевые слова: линейная регрессия, регуляризация, Ridge, Lasso, доверительные интервалы.

На протяжении всей истории человечество преследуют самоубийства. Несомненно, столь трагическое событие влияет не только на жизни близких, совершившего это деяние, но и на состояние страны, в которой он проживал. В интересах государства – прилагать всевозможные усилия для предотвращения суицидов среди населения. Рассмотрим, как влияют социально-экономические факторы на число самоубийств.

Итак, для построения этой зависимости были взяты данные, в которых содержится информация по числу самоубийств с 1985 по 2016 год в 101 стране. В датасете имеется информация по двум гендерным и шести возрастным группам: 5–14 лет, 15–24 года, 35–54 года, 55–74 года, 75+ лет. Прежде чем строить функцию зависимости, все данные были разделены на подгруппы. Таким образом, было получено 12 наборов данных, в каждом из которых зафиксирован пол и возраст. Помимо этого, была зафиксирована страна – Российская Федерация. В данной работе рассмотрена мужская группа населения в возрасте от 5 до 14 лет. Зависимость будем искать от индекса человеческого развития (ИЧР) и ВВП на душу населения.

Рассмотрим облака рассеивания, которые покажут зависимость числа самоубийств на 100 тыс. населения от каждого из рассматриваемых факторов:

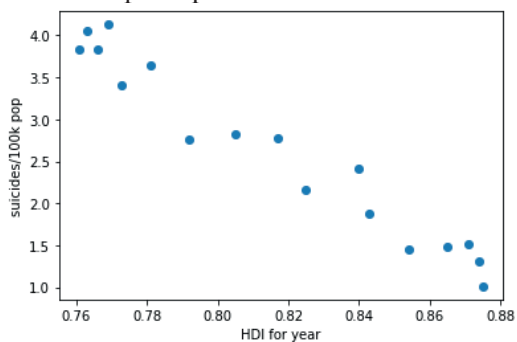


Рис. 1. Зависимость от ИЧР

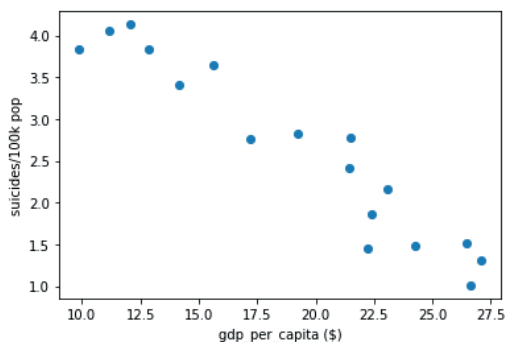


Рис. 2. Зависимость от ВВП на душу населения

По рисункам видно, что присутствует обратная линейная зависимость. Следовательно, будем строить модель множественной линейной регрессии:

$$\vec{Y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon} \quad (1)$$

Перед нами стоит задача оценить вектор коэффициентов $\vec{\beta}$. Самым простым и привычным способом решения этой задачи

является использование метода наименьших квадратов. Тогда получим следующую модель:

$$\hat{y}_{OLS} = -0.8118x_1 - 0.1686x_2. \quad (2)$$

Для нее выполнены все основные предположения регрессионного анализа. Значит, мы можем проверить ее качество. Если построить доверительный интервал для каждого коэффициента, то получим, что второй коэффициент является незначимым:

	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
x1	-0.8118	0.233	-3.486	0.003	-1.308	-0.316
x2	-0.1686	0.233	-0.724	0.480	-0.665	0.328

Рис. 3. Значимость коэффициентов регрессии модели МНК

Однако коэффициент детерминации равен 0,953, что говорит о хорошей подгонке модели под данные. Такая ситуация характерна в случае наличия мультиколлинеарности факторов. Для проверки наличия можно рассчитать корреляционную матрицу (в нашем случае достаточно использовать один коэффициент корреляции), коэффициент Variance Inflation factor (VIF) и число обусловленности матрицы $X^T X$. В нашем случае коэффициент корреляции Кенделла равен 0,8971, VIF равен 17,4383, число обусловленности – 67,7384. С коэффициентом корреляции все ясно: чем ближе к 1, тем сильнее коррелируют данные между собой. Второй показатель говорит о наличии мультиколлинеарности, если он больше 4. Если число обусловленности много больше единицы, то это свидетельствует о неустойчивости матрицы $X^T X$. Таким образом, все три метода показали, что между факторами присутствует зависимость.

При наличии мультиколлинеарности оценки по МНК становятся неустойчивыми и могут иметь слишком большие доверительные интервалы. Для того чтобы обойти эти проблемы, используются методы регуляризации, то есть ограничения по норме вектора коэффициентов модели. В зависимости от выбора нормы можно различить два вида оценок: Ridge (ограничение по норме пространства ℓ_2) и Lasso (ограничение по норме пространства ℓ_1). В этом случае для нахождения коэффициентов

модели решаются следующие оптимизационные задачи соответственно:

$$\|Y - X\beta\|_{L_2}^2 + \lambda\|\beta\|_{L_2}^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

$$\|Y - X\beta\|_{L_2}^2 + \lambda \sum_{i=1}^n |\beta_i| \rightarrow \min \quad (4)$$

После нахождения коэффициентов по каждому из методов для модели нужно сделать проверку основных предположений регрессионного анализа. Если они выполнены, то приступить к проверке качества модели. Так же как и для коэффициентов по МНК, построим доверительные интервалы для коэффициентов Ridge и Lasso.

Чтобы это было возможно, нам нужно получить оценки Lasso в явном виде. Вид (4) говорит нам о том, что найти оценки привычным нам способом через производную не получится из-за присутствия модуля. Такие задачи обычно решаются численно с использованием различных оптимизационных методов. Однако, если мы знаем априорно знаки искомых коэффициентов или уже получилось найти коэффициенты и узнать их знаки, то оценки Lasso можно представить в следующем виде:

$$\hat{\beta}_{lasso} = [X^T X]^{-1} \left(X^T Y + \frac{\lambda T^T \bar{e}}{2} \right). \quad (5)$$

Где T – матрица, на диагонали которой стоят знаки коэффициентов вектора $\hat{\beta}_{lasso}$, а на остальных местах нули.

Рассмотрим классический подход, в котором рассматривается статистика, где используются математическое ожидание оценок и их дисперсия:

$$E(\hat{\beta}_{ridge}) = [X^T X + \lambda I]^{-1} X^T X \beta \quad (6)$$

$$D(\hat{\beta}_{ridge}) = \sigma^2 [X^T X + \lambda I]^{-1} X^T X ([X^T X + \lambda I]^{-1})^T \quad (7)$$

$$E(\hat{\beta}_{Lasso}) = [X^T X]^{-1} [X^T X \beta - \lambda T^T \bar{e}] \quad (8)$$

$$D(\hat{\beta}_{Lasso}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (9)$$

Тогда предполагаемые статистики будут иметь вид:

$$\frac{\hat{\beta}_{Ridge_i} - E(\hat{\beta}_{Ridge})_i}{S \sqrt{D(\hat{\beta}_{Ridge})_{(i,i)}}} \quad (10)$$

$$\frac{\hat{\beta}_{Ridge_i} - E(\hat{\beta}_{Ridge})_i}{S \sqrt{D(\hat{\beta}_{Ridge})_{(i,i)}}} \quad (9)$$

$$\frac{\hat{\beta}_{Lasso_i} - E(\hat{\beta}_{Lasso})_i}{S \sqrt{D(\hat{\beta}_{Lasso})_{(i,i)}}} \quad (11)$$

Видим, что поступить, как в оценках МНК мы не сможем, потому что $E(\hat{\beta}_{Ridge})_i$ является линейной комбинацией всех элементов вектора искомых коэффициентов регрессии. Чтобы обойти возникшую проблему, для построения доверительных интервалов используется зависимость оценок Ridge и Lasso от оценок по МНК:

$$\hat{\beta}_{ridge} = [I + \lambda[X^T X]^{-1}]^{-1} \hat{\beta}_{OLS} \quad (12)$$

$$\hat{\beta}_{lasso} = \hat{\beta}_{OLS} + [X^T X]^{-1} \left(\frac{\lambda T^T \bar{e}}{2} \right) \quad (13)$$

Зная, что оценки по МНК имеют нормальное распределение $N(\beta, \sigma^2[X^T X]^{-1})$, можем построить доверительные интервалы следующего вида:

$$\begin{aligned} & P \left\{ [I + \lambda[X^T X]^{-1}] \hat{\beta}_{ridge_i} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k} S \sqrt{[(X^T X)^{-1}]_{(j)(j)}} < \beta_j \right. \\ & < [I + \lambda[X^T X]^{-1}] \hat{\beta}_{ridge_i} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k} S \sqrt{[(X^T X)^{-1}]_{(j)(j)}} \left. \right\} \\ & = 1 - \alpha \end{aligned} \quad (14)$$

$$P \left\{ \hat{\beta}_{lasso} - [X^T X]^{-1} \left(\frac{\lambda T^T \bar{e}}{2} \right)_j - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k} S \sqrt{[(X^T X)^{-1}]_{(j)(j)}} < \beta_j \right. \\ \left. < \hat{\beta}_{lasso} - [X^T X]^{-1} \left(\frac{\lambda T^T \bar{e}}{2} \right)_j - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k} S \sqrt{[(X^T X)^{-1}]_{(j)(j)}} \right\} = 1 - \alpha \quad (15)$$

Где α – заданная ошибка первого рода.

Помимо этого, можно построить доверительные интервалы Эфрона, которые получаются при помощи бутстрапирования. Они получаются с помощью ресэмплинга остатков и пересчета откликов [4]. Таким образом, можно получить следующую сводную таблицу доверительных интервалов для коэффициентов, полученными тремя способами:

Коэффициент	Классические доверительный интервал 80%	Классический доверительный интервал 95%	Доверительный интервал Эфрона
$\hat{\beta}_{ridge}^1 = -0.6631$	(-0.8957, -0.2602)	(-1.0986, -0.0574)	(-0.8102, -0.7758)
$\hat{\beta}_{ridge}^2 = -0.3059$	(-0.6974, -0.0619)	(-0.9003, 0.1409)	(-0.3699, -0.2760)
$\hat{\beta}_{lasso}^1 = -0.8121$	(-1.1253, -0.4986)	(-1.3254, -0.2986)	(-1.0328, -0.5739)
$\hat{\beta}_{lasso}^2 = -0.1663$	(-0.4796, 0.14709)	(-0.6797, 0.3471)	(-0.3012, -0.1345)
$\hat{\beta}_{OLS}^1 = -0.8118$	(-1.1240, -0.4997)	(-1.308, -0.316)	(-1.2169, -0.3501)
$\hat{\beta}_{OLS}^2 = -0.1686$	(-0.4808, 0.1435)	(-0.665, 0.328)	(-0.6239, 0.2464)

По построенной таблице видно, что наилучшей с точки зрения доверительных интервалов является модель с оценками, полученными по методу с Ridge регуляризацией.

Также для проверки качества можно рассчитать t-статистики для каждого коэффициента:

$$\frac{|([I + \lambda X^T X]^{-1}) \hat{\beta}_{ridge} |_i|}{S \sqrt{[X^T X]^{-1}_{(i,i)}}} \quad (16)$$

$$\frac{|\hat{\beta}_{Lasso}_i - [X^T X]^{-1} \left(\frac{\lambda T^T \bar{e}}{2}\right)_i|}{S \sqrt{[X^T X]^{-1}_{(i,i)}}} \quad (17)$$

Для рассматриваемых данных статистики будут следующими:

Статистика	Значение
t_{ridge}^1	70.2165
t_{ridge}^2	68.9037
t_{lasso}^1	3.4304
t_{lasso}^2	0.6776

Если сравнить с критическим значением на уровне 90 %, которое можно найти в специальной таблице, равным 0,8662, то можно заключить о значимости коэффициентов Ridge.

Тогда Ridge модель имеет наилучшее качество и, возвращаясь от стандартизированных данных к исходным, получаем следующую модель:

$$\hat{Y}_{Ridge} = 16.6657 - 15.9399x_1 - 0.055x_2 \quad (18)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М. : Финансы и статистика, 1987. – 349 с.
2. Hoerl, A.E., Kennard, R. Ridge regression: Biased estimation of nonorthogonal problems // *Technometrics*. – 1970. – N 12. – P. 55–67.
3. Tibshirani, Robert. Regression Shrinkage and Selection via the lasso // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (methodological)*. – 1996. – 58 (1). – 267–88
4. Yogendra P. Chaubey, Mansi Khurana, Shalini Chandra. Confidence intervals based on resampling methods using Ridge estimator in linear regression model // *New Trends in Mathematical Sciences*. – 2018. – N 4. – P. 77–86.

5. *Wessel N. van Wieringen. Lecture notes on ridge regression.*

Пурысева Мария Алексеевна, студент механико-математического факультета
Томского государственного университета, marija-2001@mail.ru.

Исследование влияния типа заряда на характеристики ударной трубы

А.А. Старосельцева, Е.Л. Лобода

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. Применение ударных волн как источника интенсивного воздействия на процесс горения, в частности, на пожар природного или техногенного характера известно в науке уже несколько десятков лет. Поверхность разрыва гидродинамических функций, которой является фронт ударной волны, может как прекратить горение, так и, наоборот, усугубить пожарную обстановку. Для исследования влияния ударных волн была изготовлена экспериментальная установка – ударная труба. В данной работе представлены результаты исследований влияния энергетических характеристик заряда на характеристики ударной трубы.

Ключевые слова: ударные волны, давление, ударная труба, горение.

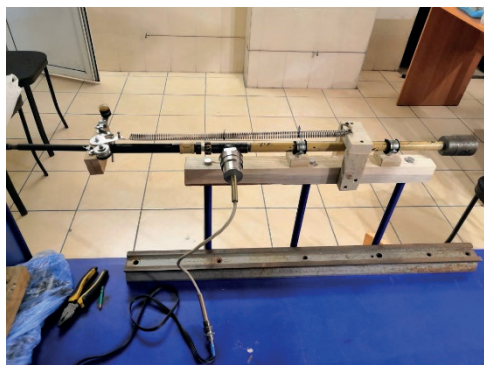
Известно, что ударная волна является поверхностью разрыва, где все гидродинамические функции терпят разрыв. Очевидно, что это явление может оказывать значительное влияние на процесс горения вплоть до его полного прекращения. В XX веке в Томском государственном университете под руководством профессора А.М. Гришина проводились исследования по воздействию ударных волн (УВ) на лесной пожар [1]. Были получены обнадеживающие результаты, что дает предпосылки для разработки принципиально новых способов борьбы с природными пожарами [2], а самим профессором А.М. Гришиным была выдвинута гипотеза о детонации продуктов пиролиза в результате воздействия УВ. Тем не менее полученные на тот момент научные результаты по воздействию УВ на фронт лесного пожара были существенно ограничены техническими возможностями коллектива и заключались в наборе экспериментальных данных, зарегистрированных датчиками давления и в визуальном наблюдении. Современный уровень развития техники позволяет производить визуализацию распространения УВ с помощью скоростных камер, а

взаимодействие УВ с фронтом горения можно регистрировать при помощи методов ИК термографии.

Для исследования влияния УВ на фронт горения необходимо создать условия для формирования сверхзвукового течения с разными параметрами и хорошей повторяемостью. Выполнение этих условий возможно с применением ударной трубы.

Описание экспериментальной установки

В ТГУ была разработана ударная труба (рис. 1) за счет изменения формы насадки и мощности источника энергии. В качестве источника энергии используются строительные монтажные патроны марки ДЗ, Д4 и Д5 («Д» обозначает длинные) с характеристиками, приведенными в табл. 1. Внешний вид пороха приведен на рис. 2.



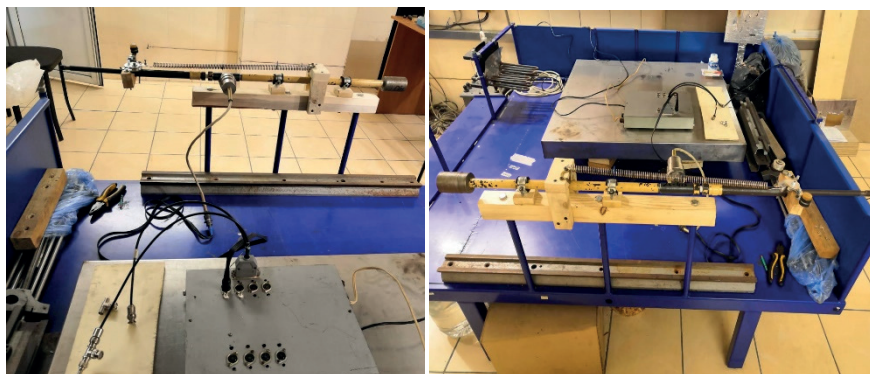
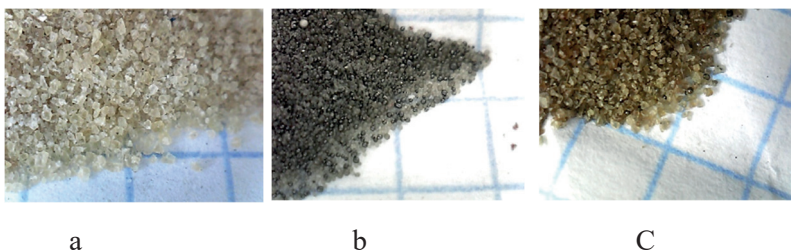


Рис. 1. Экспериментальная установка

Таблица 1.

Характеристики используемых строительных монтажных патронов

Калибр, мм	Цветовая маркировка, индекс	Энергия порохового заряда, Дж	Масса пороха в патроне, г
6,8 x 18	Синий, Д3	457–574	0,31–0,32
	Красный, Д4	57–703	0,35
	Черный, Д5	703–846	0,36



а

б

с

Рис. 2. Внешний вид пороха, находящегося в патронах Д3 (а), Д4 (б), Д5 (с)

Для определения начального давления и давления в выходной части ударной трубы (до насадки) применялся тензометрический датчик давления ЛХ-415/30 со следующими

характеристиками: $P = 0 - 30 \text{ кгс / см}^2$, $R = 700 \pm 50 \text{ Ом}$. Тарировка датчика (рис. 3) производилась с использованием стрелочного манометра до 9 кгс / см^2 с шагом 1 кгс / см^2 . В результате полученная тарировка имела линейный вид, что в дальнейшем позволило экстраполировать полученные данные на большие давления.

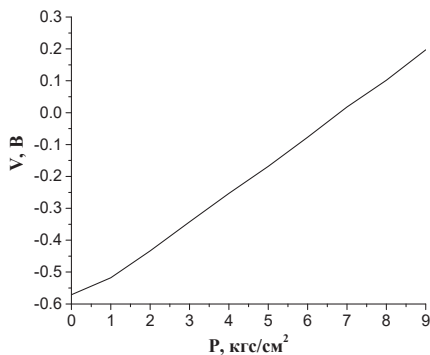


Рис. 3. Тарировка датчика давления ЛХ-415/30

Сигнал с датчиков поступал на усилитель, а затем регистрировался с использованием осциллографа АКПП-74824А.

На рис. 4 показаны значения давления в начальной части трубы.

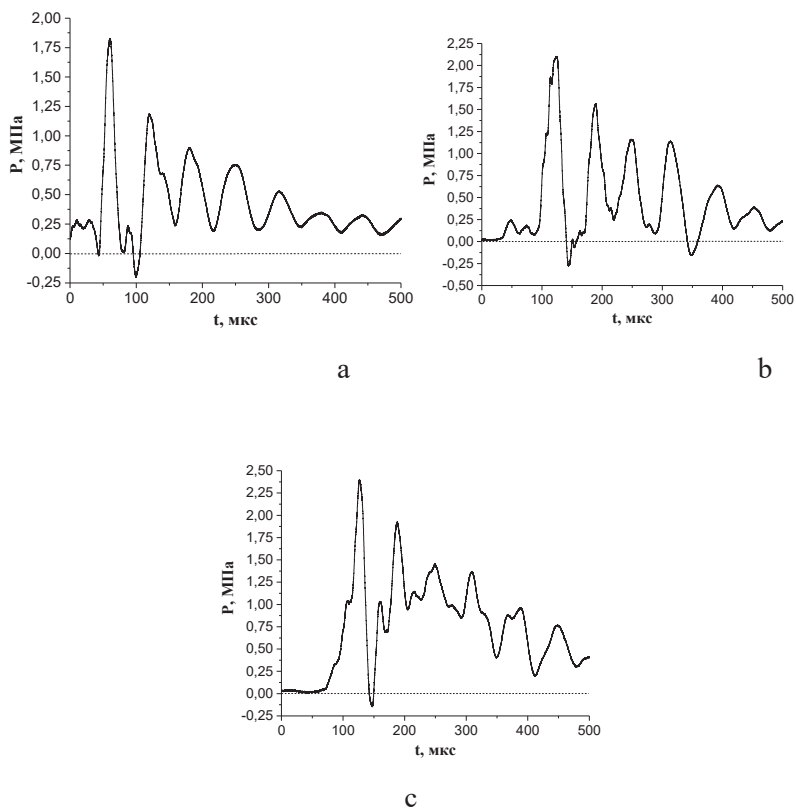


Рис. 4. Изменение давления в трубе со временем в начальной части трубы (а – патрон Д3, b – патрон Д4, с – патрон Д5)

Из рис. 4 можно сделать вывод, что увеличение энергии заряда на 50 % приводит к росту давления на входе на 30 %. Полученные результаты будут использованы для численного моделирования течения в ударной трубе и на выходе из трубы с насадками различной конфигурации.

Заключение

В работе получены экспериментальные данные об изменении давления газов в ударной трубе при применении различных источников энергии. В качестве источников энергии использовались строительно-монтажные патроны трех типов. Установлено, что увеличение энергии заряда на 60 % приводит к увеличению давления в трубе не более чем на 25 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев Ю.М. *Математическое и физическое моделирование инициирования детонации в твердых взрывчатых веществах и распространение ударных волн в пологом леса при лесных пожарах: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 01.04.05 / Ковалев Юрий Михайлович; науч. рук. А.М. Гришин; науч. конс. В.А. Шляпочников; Том. гос. ун-т им. В.В. Куйбышева; НИИ прикладной математики и механики. – Томск : [б. и.], 1987. – 195 с.*
2. А.М. Гришин *Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. – Новосибирск : Наука, 1992. – 404 с.*
3. Лоцилов А.А., Ильичева М.Н., Иконников В.В., Шаулов Д.А., Орлов Ю.Ф., Зенькович А.В. *Математическое моделирование тушения лесного пожара при помощи направленного взрыва // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева № 4 (123), 2018. С. 33–40.*

Старосельцева Ася Алексеевна, студентка ММФ ТГУ, 222-pro@mail.ru.

Лобода Егор Леонидович, д. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой физической и вычислительной механики ММФ ТГУ, loboda@mail.tsu.ru.

Скорейшее обнаружение эпидемий

Р.О. Теньзин, С.М. Пергаменщиков, Е.А. Пчелинцев

*Национальный исследовательский Томский государственный
университет, Томск*

Аннотация. В работе рассматривается задача построения оптимальной процедуры обнаружения разладки в марковском процессе, представляющем собой эпидемиологическую динамику количества инфицированных.

Ключевые слова: разладка в марковском процессе, оптимальная остановка, байесовская постановка, обнаружение эпидемий.

Рассмотрим марковский процесс $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$, где μ – σ -конечная мера на \mathcal{B} . При этом обозначим естественную фильтрацию процесса $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$, представляющую собой всю доступную информацию к моменту времени $0 \leq n \leq N$, как $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$. При этом в некоторый неизвестный момент времени ν в процессе происходит разладка, то есть до момента времени ν (включительно) наблюдается один однородный марковский процесс $(X_n)_{0 \leq n \leq \nu}$ с переходной условной плотностью распределения $f^*(x|y)$, а после этого момента уже другой однородный марковский процесс $(X_n)_{n \geq \nu+1}$ с переходной условной плотностью $f(x|y)$.

Заметим, что в нашей постановке наблюдения X_n процесса $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ в каждый момент времени $0 \leq n \leq N$ представляют собой количество людей, предположительно инфицированных неким вирусом. При этом количество наблюдений N – это длительность рассматриваемого эпидемиологического сезона, а момент разладки ν – последний момент времени до начала эпидемии; переходные же плотности распределений имеют следующий вид

$$f^*(y|x) = \binom{x}{y} (\theta_*)^{x-y} (1-\theta_*)^y \mathbf{1}_{\{x \geq y\}},$$

$$f(y|x) = \binom{x}{y} \theta^{x-y} (1-\theta)^y \mathbf{1}_{\{x \geq y\}},$$

где, в свою очередь, параметры θ_* и θ представляют собой вероятности заражения до и после момента разладки, а также, как можно заметить, именно в этом параметре и происходит разладка.

В таком случае для любого $A \in \mathcal{B}$ можем завести следующие переходные вероятности:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} \in A | X_n = x) = \int_A f^*(y|x) \mu(dy) \quad \text{для} \quad 0 \leq n \leq \nu,$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} \in A | X_n = x) = \int_A f(y|x) \mu(dy) \quad \text{для} \quad n \geq \nu + 1.$$

Также можно задать и вероятности совместных распределений, которые для $A \in \mathcal{B}_n$, где $\mathcal{B}_n = \underbrace{\mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}}_n$ будут иметь в случае

$0 \leq n \leq \nu$ следующий вид

$$\mathbf{P}^*((X_1, \dots, X_n) \in A) = \int_A \mathbf{q}^*(y_1, \dots, y_n) \mu(dy_1) \dots \mu(dy_n),$$

где

$$\mathbf{q}^*(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f^*(y_i | y_{i-1}),$$

а в случае $n \geq \nu + 1$ следующий

$$\mathbf{P}_\nu((X_1, \dots, X_n) \in A) = \int_A \mathbf{q}_\nu(y_1, \dots, y_n) \mu(dy_1) \dots \mu(dy_n),$$

где

$$\mathbf{q}_\nu(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^{\nu} f^*(y_i | y_{i-1}) \prod_{i=\nu+1}^n f(y_i | y_{i-1}),$$

Значит, можем задать также и соответствующую производную Радона – Никодима для \mathbf{P}^* и \mathbf{P}_ν на \mathcal{B}_n :

$$h_{\nu,n} = \frac{d\mathbf{P}_\nu}{d\mathbf{P}^*} = \frac{\mathbf{q}_\nu(y_1, \dots, y_n)}{\mathbf{q}^*(y_1, \dots, y_n)} = \prod_{i=\nu+1}^n \frac{f(y_i|y_{i-1})}{f^*(y_i|y_{i-1})},$$

где $h_{\nu,n} = 1$ при $\nu \geq n$.

В данной работе рассматривается байесовская постановка задачи, то есть предполагается, что момент разладки ν – это случайная величина со значениями во множестве $\mathcal{I}_N = \{0, \dots, N\}$, принадлежащая некоторому распределению $\mathbf{P}(\nu = n)$, которое обычно называют априорным распределением момента разладки. В этой статье мы рассматриваем равномерное априорное распределение, то есть

$$\pi_n = \pi_* = \mathbf{P}(\nu = n) = \frac{1}{N+1} \quad \text{для } 0 \leq n \leq N.$$

Также в этой постановке нам понадобится следующая байесовская вероятностная мера $\tilde{\mathbf{P}}$, заданная на σ -алгебре $\mathcal{I}_N \otimes \mathcal{B}_N$, то есть для любых $I \in \mathcal{I}_N$ и $A \in \mathcal{B}_N$ определим

$$\tilde{\mathbf{P}}(I \times A) = \sum_{i \in I} \pi_i \mathbf{P}_i(A).$$

Зададим также апостериорное распределение вероятностей для момента разладки ν следующим образом

$$\tilde{\mathbf{P}}(\nu \leq n | \mathcal{F}_n).$$

При этом в данной работе было найдено иное представление для апостериорного распределения.

Лемма 1. Апостериорное распределение момента разладки ν может быть представлено следующим образом

$$\tilde{\mathbf{P}}(\nu \leq n | \mathcal{F}_n) = \frac{R_n}{R_n + \bar{\pi}_n},$$

где $R_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i h_{i,n}$ и $\bar{\pi}_n = \sum_{i=n+1}^N \pi_i$.

При этом стоит отметить, что статистики Робертса R_n также могут быть рассчитаны рекуррентно.

Предложение 1. Для расчета значений статистик Робертса R_n можно использовать следующую формулу

$$R_n = \eta_n R_{n-1} + \pi_n,$$

где $\eta_n = \eta(X_n, X_{n-1})$, а, в свою очередь, $\eta(y, x) = f(y, x) / f^*(y, x)$ и $R_0 = \pi_*$.

Основная задача заключается в скорейшем отыскании момента разладки (начала эпидемии) при фиксированной вероятности ложной тревоги, то есть

$$\tilde{\mathbf{P}}(\tau < \nu) < \alpha,$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$ и τ — это момент остановки из множества \mathcal{M}_α всех моментов остановки, удовлетворяющих условию на вероятность ложной тревоги.

Таким образом, необходимо решить следующую оптимизационную задачу

$$\inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha} \tilde{\mathbf{E}}(\tau - \nu)_+, \quad (1)$$

где $(x)_+ = \max(0, x)$.

Используя метод множителей Лагранжа, получим основную постановку задачи

$$\min_{\tau \in \mathcal{M}_1} (\lambda \tilde{\mathbf{E}}(\tau - \nu)_+ + \tilde{\mathbf{P}}(\tau < \nu)).$$

Отметим, что задача имеет иное представление.

Лемма 2. Основная постановка задачи может быть переформулирована в виде

$$\min_{\tau \in \mathcal{M}_1} (\lambda \tilde{\mathbf{E}}(\tau - \nu)_+ + \tilde{\mathbf{P}}(\tau < \nu)) = 1 - \max_{\tau \in \mathcal{M}_1} \mathbf{E}^* G_\tau,$$

где $G_n = R_n - \lambda \sum_{i=0}^{n-1} R_i$ и \mathbf{E}^* — это математическое ожидание по вероятностной мере \mathbf{P}^* .

Таким образом, получили возможность перейти от байесовской вероятностной меры к мере в случае, если разладка еще не произошла. Более того, благодаря этому теперь вместо задачи о разладке в марковском процессе $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ можем рассматривать задачу об оптимальной остановке однородного марковского процесса $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$, где $Z_n = (R_n, X_n)$.

Замечание. На самом деле процесс $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ не всегда будет *однородным* марковским, однако для достижения этого свойства в данной работе рассматривается биномиальная модель,

предложенная М. Бароном в работе [1], в которой доказано необходимое нам свойство процесса $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Для решения задачи об оптимальной остановке однородного марковского процесса в данной работе используется подход, разработанный Альбертом Ширяевым [2], который состоит в решении следующих задач для $0 \leq n \leq N$

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbf{E}_z^* G_\tau, \quad (2)$$

где \mathbf{E}_z^* — это математическое ожидание при условии, что в начальный момент времени значение процесса $Z_0 = z$, то есть конкретной

$$\mathbf{E}_z^* h(\cdot) = \mathbf{E}^* (h(\cdot) | Z_0 = z),$$

а также

$$\mathcal{T}_n = \left\{ \tau \in \mathcal{M}_1 : \tau \leq n \text{ — п.н.} \right\}.$$

Следуя подходу Ширяева для решения задачи оптимальной остановки (2), необходимо построить огибающую Снелла для процесса $(G_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Чтобы это сделать для некоторой функции h , для которой верно условие $\mathbf{E}_z^* | h(Z) |$, определим оператор следующего вида

$$\mathbf{Q}_\lambda(h)(z) = \max(h(z), \mathbf{T}(\mathbf{Q}_\lambda(h))(z) - \lambda r),$$

где $\mathbf{T}(h)(Z) = \mathbf{E}_z^* h(Z)$.

Лемма 3. Пусть для функции $h : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется условие $\mathbf{E}_z^* | h(Z) |$. Тогда для $n \geq 1$

$$\mathbf{Q}_\lambda^{n+1}(h)(z) = \max(h(z), \mathbf{T}(\mathbf{Q}_\lambda^n(h))(z) - \lambda r).$$

Лемма 4. Следующий процесс

$$Y_n = \mathbf{Q}_\lambda^{n-k}(h)(Z_k) - \lambda \sum_{i=0}^{k-1} R_i$$

является огибающей Снелла для процесса $(G_k)_{0 \leq k \leq n}$.

В таком случае, согласно рассматриваемому подходу, можем определить следующую последовательную процедуру

$$\tau_n^* = \min \left\{ 0 \leq k \leq n : \mathbf{Q}_\lambda^{n-k}(g)(R_k, X_k) = R_k \right\}, \quad (3)$$

где $g(r, x) = r$.

Наиболее важные результаты данной работы представлены в последующих теоремах.

Теорема 1. Для любых $\lambda > 0$ полученный из процедуры (3) момент остановки τ_n^* является искомым оптимальным моментом остановки, то есть решением задачи (2):

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbf{E}_z^* G_\tau = \mathbf{E}_z^* G_{\tau_n^*}.$$

Теорема 2. Если существует такое λ_α , удовлетворяющее условию на ограничение вероятности ложных тревог $\tilde{\mathbf{P}}(\tau < \nu) < \alpha$, то результат следующей последовательной процедуры

$$\mathbf{t}_{\lambda_\alpha}^* = \min \left\{ k \geq 0 : \mathbf{Q}_{\lambda_\alpha}^{N-k}(g)(R_k, X_k) = R_k \right\} \quad (4)$$

будет являться оптимальным (неасимптотическим!) решением основной задачи (1) об отыскании разладки в марковском процессе при условии ограничения вероятности ложных тревог. В данной работе был найден способ отыскания такого λ_α . В первую очередь в ходе исследования было отмечено, что:

Предложение 2. Вероятность ложных тревог имеет следующее представление

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}_\lambda^* \leq \nu) = \pi_* \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{E}^* U_{m,\lambda}(k_1, \dots, k_m),$$

где

$$U_{m,\lambda}(k_1, \dots, k_m) = \mathbf{1}_{\left\{ \min_{1 \leq j \leq m} (\mathbf{Q}_\lambda^{N-j}(g)(r_j, k_j) - r_j) = 0 \right\}}.$$

В таком случае, определив функцию вида

$$\mathbf{F}(\lambda) = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}_\lambda^* \leq \nu),$$

сможем рассчитывать значение λ_α^* , удовлетворяющее условию

$\tilde{\mathbf{P}}(\tau < \nu) < \alpha$, из следующей процедуры

$$\lambda_\alpha^* = \sup \{ \lambda \geq 0 : \mathbf{F}(\lambda) \leq \alpha \}. \quad (5)$$

Тогда, используя значение λ_α^* , сможем получить неасимптотическое оптимальное решение задачи (1), как

$$\inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha} \tilde{\mathbf{E}}(\tau - \nu)_+ = \tilde{\mathbf{E}}(\lambda_\alpha^* - \nu)_+.$$

Для применения данной теории к реальной эпидемиологической задаче, согласно рассматриваемой биномиальной модели, процесс $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ может быть представлен как процесс Гальтона

– Ватсона (см. [3]), то есть фиксируется начальное значение процесса $X_0 = D$, где D – количество наблюдаемых в начальный момент времени, а остальные наблюдения X_n для $1 \leq n \leq N$ рассчитываются по следующей формуле

$$X_n = S_{n, X_{n-1}}$$

при этом

$$S_{n,m} = \sum_{i=1}^m \xi_{n,i},$$

где $(\xi_{n,i})_{1 \leq n \leq N, i \geq 1}$ – независимые одинаково распределенные бернуллиевские случайные величины, для которых $\mathbf{P}(\xi_{n,i} = 1) = 1 - \vartheta_n$ и $\vartheta_n = \theta_* \mathbf{1}_{\{n \leq \nu\}} + \theta \mathbf{1}_{\{\nu > n\}}$.

Таким образом, для обнаружения эпидемии в момент времени $1 \leq n \leq N$ необходимо, пользуясь процедурой (5), рассчитать значение λ_α^* , а затем, предварительно рассчитав все необходимые значения из последовательности $(\mathbf{Q}_\lambda^{N-k}(g)(Z_k))_{0 \leq k \leq n}$, получить решение в виде оптимального момента остановки из процедуры (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baron, M., Choudhary, K. and Yu, X. *Change-Point Detection in Binomial Thinning Processes, with Applications in Epidemiology. // Sequential Analysis: Design Methods and Applications.* – 32. – 2013. – P. 350–367.
2. Shiryaev, A. N. *Optimal Stopping Rules.* // New York: Springer. – 1978.
3. Baron, M. *Bayes and asymptotically pointwise optimal stopping rules for the detection of influenza epidemics. In. in Case Studies in Bayesian Statistics, vol. 6, C. Gatsonis, R. E. Kass, A. Carriquiry,*
4. Gelman, D. Higdon, D. K. Pauler, and I. Verdinelli, eds. // New York: Springer. – 2002. – P. 153–163.

Теньзин Роман Олегович, бакалавр математики и компьютерных наук, студент магистратуры ММФ НИ ТГУ, 4ubarok@gmail.com.

Пергаменщиков Сергей Маркович, доктор физ.-мат. наук, профессор в лаборатории математики в Руанском университете, Serge.Pergamenchtchikov@univ-rohen.fr.

Пчелинцев Евгений Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ НИ ТГУ, evgen-pch@yandex.ru.

* Работа выполнена при поддержке РФФ, проект № 22-21-00302.

О локальном решении модели Кокса – Ингерсолла – Росса А.Ю. Трошин, Т.В. Емельянова

*Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск*

Аннотация. В работе рассматривается модель Кокса – Ингерсолла – Росса, используемая для описания и изучения процентных ставок и числа заболевших от COVID-19. Получены достаточные условия существования локального решения данного уравнения, вид такого решения и оценки параметров уравнения, когда одно из достаточных условий не выполняется. Проведено имитационное моделирование для иллюстрации результата.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, модель Кокса – Ингерсолла – Росса, оценки параметров.

Рассмотрим модель Кокса – Ингерсолла – Росса, задаваемую процессом Ито r_t с дифференциалом

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,$$

где $a, b \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ – параметры и W_t – винеровский процесс.

Теорема о локальном решении

Пусть $a \neq \frac{\sigma^2}{4}, b \neq 0$, для некоторого момента времени \hat{t} выполнено

$$r_{\hat{t}} = \frac{4a - \sigma^2}{4b},$$

и существует непрерывная вторая производная $\dot{r}_{\hat{t}}$. Тогда в некоторой окрестности \hat{t} решение имеет вид

$$r_t = \frac{4a - \sigma^2}{4b}.$$

Доказательство.

Делая замену

$$\xi = \xi_t = \frac{2}{\sigma}\sqrt{r_t},$$

по формуле Ито получим

$$d\xi_t = \frac{2}{\sigma} \left(\left(0 + (a - br_t) \frac{1}{2\sqrt{r_t}} + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t \frac{-1}{4r_t\sqrt{r_t}} \right) dt + \frac{1}{2\sqrt{r_t}} \sigma \sqrt{r_t} dW_t \right),$$

$$d\xi_t = \frac{a - br_t - \frac{\sigma^2}{4}}{\sigma\sqrt{r_t}} dt + dW_t = \left(\frac{4a - \sigma^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\xi} - \frac{b}{2} \xi \right) dt + dW_t.$$

Теперь введем искусственную переменную – параметр $\theta \neq 0$ и функцию

$$F = F(\theta, \xi) = \frac{1}{\theta} \left(\frac{4a - \sigma^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\xi} - \frac{b}{2} \xi \right).$$

Заметим, что

$$F(\theta, \xi_t) = \frac{1}{\theta} \left(\frac{4a - \sigma^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{4a - \sigma^2}{4b}}} - \frac{b}{2} \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{4a - \sigma^2}{4b}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(\theta, \xi_t) = \frac{1}{\theta} \left(-\frac{4a - \sigma^2}{2\sigma^2} \frac{4b\sigma^2}{4(4a - \sigma^2)} - \frac{b}{2} \right) = -\frac{b}{\theta} \neq 0,$$

и в окрестности точки (θ, ξ_t) функция F непрерывная, ибо $a \neq \frac{\sigma^2}{4}$. Поэтому по теореме о неявном отображении существует функция $\phi(\theta)$, что

$$F(\theta, \xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = \phi(\theta).$$

В окрестности \hat{t} , в которой работает теорема о неявной функции, имеем

$$F(\theta, \xi) = \frac{1}{\theta} \left(\frac{4a - \sigma^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\xi} - \frac{b}{2} \xi \right) = 0 \Leftrightarrow \phi(\theta) = \xi = \sqrt{\frac{4a - \sigma^2}{b\sigma^2}},$$

$$r_t = \frac{\sigma^2}{4} \xi_t^2 = \frac{4a - \sigma^2}{4b}.$$

Теорема доказана.

Теорема об оценках параметра

Пусть $a = \frac{\sigma^2}{4}, b \neq 0$ и существует непрерывная вторая производная \ddot{r}_t . Тогда смещение $b_T(\theta) = E(\hat{\theta}_T(\xi) - \theta)$ и среднеквадратическая ошибка $B_T(\theta) = E(\hat{\theta}_T(\xi) - \theta)^2$ параметра $\theta = b$ вычисляются по формулам

$$b_T(b) = 4 \frac{d}{db} E \left(\int_0^T \xi_t^2 dt \right)^{-1},$$

$$B_T(b) = 4E \left(\int_0^T \xi_t^2 dt \right)^{-1} + 16 \frac{d^2}{db^2} E \left(\int_0^T \xi_t^2 dt \right)^{-2}.$$

Доказательство.

Повторяя первые строки теоремы о локальном решении, с заменой и применением формулы Ито, получим уравнение

$$d\xi_t = -\frac{b}{2}\xi dt + dW_t.$$

Такое уравнение уже хорошо исследовано. В [3], в равенствах (17.28) и (17.29), достаточно положить $\theta = b$ а $a_t(\xi) = -\frac{\xi}{2}$. Теорема доказана.

Проведем имитационное моделирование полученного результата (теорема о локальном решении) в языке программирования Python. В [2] решение уравнения из модели Кокса – Ингерсолла – Росса имеет вид

$$r_t = \varphi(W_t + C(t)),$$

где

$$\varphi(y) = \frac{1}{4}(2\sqrt{r_0} + y\sigma)^2, f(t, C) = 2\sqrt{r_0} + y(W_t + C),$$

а $C(t)$ – решение следующей задачи Коши

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{b\left(\frac{a}{b} - f^2(t, C(t)) - \frac{\sigma^2}{4}\right)}{\frac{1}{2}\sigma|f(t, C(t))|}, C(0) = 0.$$

Моделировать процесс W_t будем с помощью встроенных функций генерации случайных величин, распределенных

нормально. Решать уравнение на $C(t)$ будем численно с помощью метода Эйлера.

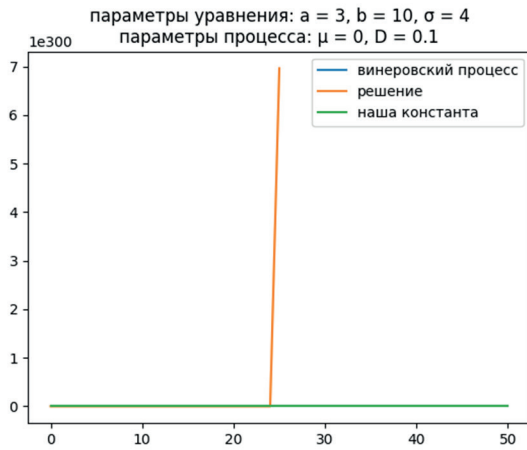


Рис. 1

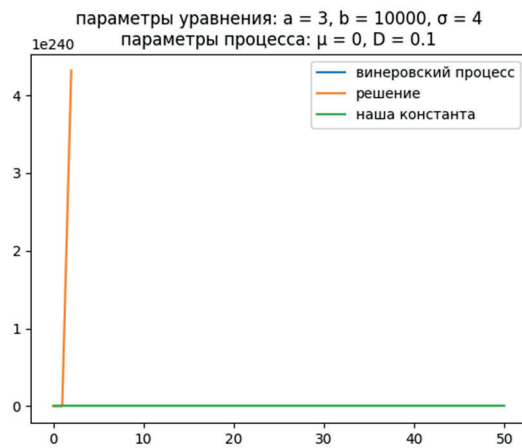


Рис. 2

На рис. 1 и рис. 2 продемонстрирована работа теоремы о локальном решении. На рис.1 аппроксимация решения лучше, чем на рис. 2.

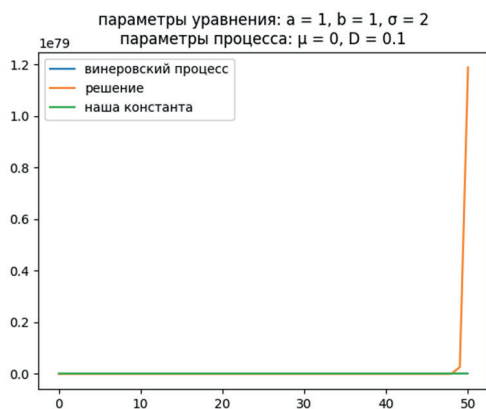


Рис. 3

На рис. 3 случай, когда условия теоремы о локальном решении не выполнены, а именно $a = \frac{\sigma^2}{4}$, но локальное решение существует, выражается полученной формулой и осуществляет неплохую аппроксимацию. Поэтому полученное достаточное условие не является критерием.

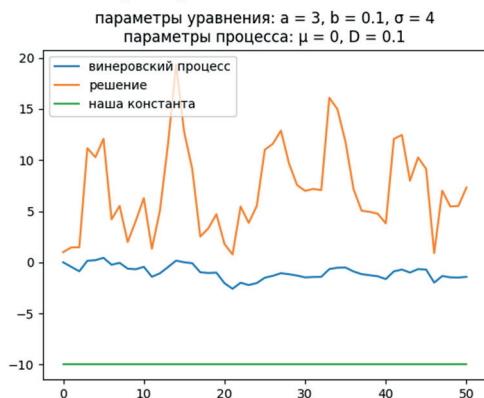


Рис. 4

На рис. 4 проиллюстрирован случай, когда условия теоремы не выполнены, $r_t \neq \frac{4a-\sigma^2}{4b}$, и формула для локального решения не работает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А.В. Теория случайных процессов. М. : Физматлит, 2003. 399 с. (Теория вероятностей и математическая статистика.)
2. Асылгареев А.С. Сравнение траекторий моделей, управляемых стохастическими дифференциальными уравнениями. Уфа : УГАТУ, 2019. 107 с.
3. Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М. : Наука, 1974. 696 с. (Теория вероятностей и математическая статистика.)

Трошин Антон Юрьевич, студент ММФ ТГУ, antiquis@bk.ru.

Емельянова Татьяна Вениаминовна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ, tv_em@mail.ru.

Об одном алгоритме расчета прочности и термонапряженности неоднородных пластин из трансверсально-изотропных композиционных материалов

И.Х. Хамзаев, С.С. Ахтамбаев

Ферганский политехнический институт, Фергана, Узбекистан

Аннотация. В работе проводится решение задачи напряженного и термонапряженного состояния слоистых конструкций на основе неклассических (уточненных) моделей. Построены схемы расчета на основе численных методов – метода конечных элементов и метода конечных разностей.

Ключевые слова: напряжение, искомые функции, векторы нагрузок, уравнения, гипотезы.

Все шире используются формы конструкций, основной особенностью которых является неоднородность. К ним в первую очередь относятся многослойные системы, которые входят в класс кусочно-неоднородных. Они применяются при строительстве зданий, сооружений и дорожных покрытий в авиации и машиностроении. Такие системы проектируют целенаправленно для удовлетворения заданного комплекса свойств конструкций: пониженной материалоемкости при высокой прочности, теплостойкости, звукопроницаемости и т. д.

Для проектирования необходимы теория и методы расчета, которые позволяют в неразрывной связи оценивать напряженно-деформированное состояние конструкции заданного геометрического очертания и неоднородной структуры.

Оценка напряженно-деформированного состояния таких систем является сложной задачей механики деформируемого твердого тела.

В определенной мере эта задача может быть решена на основе разработки универсальных теоретических моделей, для

которых число и порядок разрешающих уравнений не зависят от степени неоднородности конструктивных элементов (оболочек, пластин, балок [1].

Определить составляющие напряженно-деформированного состояния в слоях, т. е. во всех элементах неоднородность структуры.

Реализация таких моделей должна быть осуществлена методами строительной механики, методом конечных элементов [1, 2].

В работе приведены решения задач напряженного и термонапряженного состояния многослойных пластин кусочно-непрерывного строения по толщине из композиционных материалов.

В основу решения положена уточненная (неклассическая) теория слоистых пластин, учитывающая влияние деформаций поперечного сдвига и обжатия, а также поперечные нормальные напряжения. Слои пластины обладают свойством трансверсальной изотропии [1, 3].

Для приведения трехмерной задачи к двумерной используется метод гипотез, учитывающий указанные деформации, а для температурных задач – предположения Дюамеля – Неймана и полилинейный закон изменения температуры по толщине пакета слоев. Гипотезы привлекаются для всего пакета слоев в целом.

Для задачи прочности они имеют следующий вид:

$$e_{i3} = \varphi_{1,x}\eta_{1K}(z) + q_x^-\eta_{2K}(z) + q_x^+\pi_{3K}(z) \quad (1)$$

$$e_{33} = \varphi_1\varphi_{1K}(z) + q_{x,x}^-\varphi_{2K}(z) + q_{x,x}^+\varphi_{3K}(z) + q_z^-\varphi_{4K}(z) + q_z^+\varphi_{5K}(z) \quad (2)$$

Для задачи термонапряженного состояния введены следующие гипотезы:

$$2e_{i3} = \varphi_{p,i}F_{pK}(z) \quad (3)$$

$$e_{33} = 0; \quad (i = 1,2; p = 1,2,3) \quad (4)$$

Системы разрешающих уравнений имеют порядок, который не зависит от количества слоев. Функции распределения по толщине пакета получены из решения задачи в первом

приближении по классической теории и учитывают условие жесткого контакта.

Построены схемы расчета неоднородных пластин на основе метода конечных элементов (МКЭ) и метода конечных разностей (МКР) дискретизации объектов, что позволяет получить существенное снижение числа неизвестных по сравнению со схемой дискретизаций неоднородных систем как трехмерных тел [2, 3].

Аналогия и аппроксимация перемещений и сдвигов приводит к матрице жесткости блочной структуры. Каждый блок матрицы состоит из подблока матрицы жесткости, построенной на основании классической теории пластин, умноженной на соответствующий жесткостной коэффициент. Построение матрицы жесткости (МЖ) для такой модели имеет особенность: в выражениях, описывающих тензор напряжений и тензор деформаций, входят как искомые функции, так и заданные векторы нагрузок на поверхности пластины. Вид матрицы жесткости определяет искомые функции.

Часть тензора напряжений, определяемая функциями нагрузок на поверхности, дополняет вектор узловых нагрузок [1, 2].

Приведены результаты исследований напряженного и термонапряженного состояния композиционных пластин, имеющих различные области применения.

Рассмотрим расчет трехслойной балки по предлагаемой методике расчета, чтобы найти наибольший прогиб и нормальное растягивающее напряжение в трехслойной балке, защемленной по концам (рис. 2).

Нагрузка равномерно распределенная, характеристики слоев следующие:

$$q_z = q$$

$$h_1 = 0,045 \text{ см}; h_2 = 1,0 \text{ см}; E_1 = 7 \cdot 10^4 \text{ МПа}; E_2 = 90 \text{ МПа}; \mu_1 = 0,3; \mu_2 = 0,22.$$

Учитывая рассматриваемые аналогии с известными решениями технической теории балок, имеем [1]:

$$u = 0; \quad q_x^z = 0; \quad \bar{\psi}_{1\kappa}(z) = z; \quad \bar{\psi}_{2\kappa}(z) = \bar{\psi}_{2\kappa}(z).$$

$$\Phi_{\max} = -\frac{ql^3}{192D_{11}}; \quad \chi_{\max} = \frac{ql^2}{24D_{11}}; \quad w_{\max} = -\frac{ql^3}{192D_{11}} \left(1 - \frac{16c_{21}}{l^2}\right)$$

получаем прогиб и напряжения с учетом предлагаемой методики расчета:

$$w(x) = \Phi(x) - \frac{\bar{D}_{12}}{D_{11}} \chi(x) = \Phi(x) - \bar{C}_{21} \chi(x)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= -E_k \left[\frac{d^2 w}{dx^2} z + \frac{d^2 \chi}{dx^2} \psi_{2k}(z) \right] = \left\{ \frac{d^2 \Phi}{dx^2} z - \frac{d^2 \chi}{dx^2} c_{21} z \left[1 - \frac{\psi_{2k}(z)}{c_{21} z} \right] \right\} = \\ &= \frac{ql^2}{24D_{11}} E_k z \left\{ 1 + \frac{24c_{21}}{l^2} \left[1 - \frac{\psi_{2k}(z)}{c_{21} z} \right] \right\} \end{aligned}$$

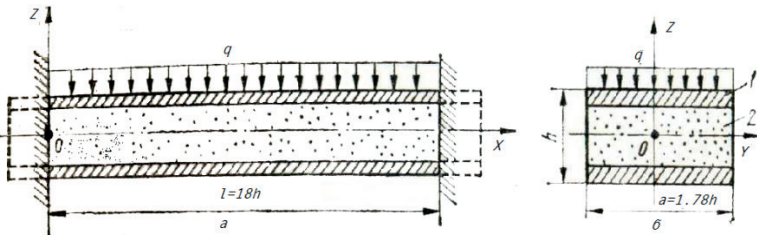


Рис. 2: а) общий вид трехслойной балки; б) поперечное сечение с номерами слоев

Для рассматриваемой балки при:

$$D_{11} = 387 \text{ кН} \cdot \text{см}^2; \quad c_{21} = 47,8 \text{ см}^2;$$

$$\psi_{11} \left(\frac{h}{2} \right) = 23,38 \text{ см}^3; \quad z = \frac{h}{2} = 0,555 \text{ см},$$

$$w_{\max} = 2,91 \frac{ql^3}{192D_{11}}; \quad \sigma_{\max}^1 = 1,35 \frac{ql^2 E_1 h}{48D_{11}}$$

Таким образом, прогиб в 2,91 раза, а нормальное напряжение в 1,35 раза больше, чем найденный по технической теории изгиба балок.

Результаты расчетов показывают, что расчет многослойных конструкций нужно вести по предлагаемой методике расчета, так как техническая теория к расчету рассмотренной задачи неприменима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. *Метод конечных элементов. / Учебное пособие для вузов под ред. П.М. Варвака. Киев. / Высшая школа. – 1981. – 176 с.*
2. *Хамзаев И.Х. / Уравнения термонапряженного состояния многослойных пластин /В сб. «Расчет пространственных строительных конструкций». – Куйбышев. – 1985. – С. 104–110.*
3. *Хамзаев И.Х. / Расчет слоистой плиты на упругом основании плиты жесткой дорожной одежды на температурное воздействие. / Научн. техн. журнал. Фер. ПИ. / Фергана. 2009 г. вып. 1. стр. 41, ..., 47.*

Хамзаев Иномжон Хамзаевич, кандидат технических наук, доцент, доцент Ферганского политехнического института, hamzaevinomjon@gmail.com.

Ахтамбаев Собитжон Сохибжонович, преподаватель Ферганского политехнического института, ahtambaevs@mail.ru.

Численное решение задачи типа «хищник – жертва» с учетом миграционных процессов

А.Н. Хамидов, М.Д. Михайлов

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация: моделирование систем типа «хищник – жертва» является существенным элементом при математическом анализе актуальных проблем биологии, экологии и медицины. В настоящее время важной задачей является разработка новых подходов для построения или улучшения математических моделей. Это делается для того, чтобы получить численные результаты, максимально приближенные к реальным.

В данной работе рассматривается двумерная модель задачи типа «хищник – жертва» с учетом поискового поведения хищника. Особенностью этой модели является наличие трофической функции Холлинга, учитывающей насыщение рациона питания хищника при увеличении плотности популяции жертв.

Ключевые слова: модель «хищник – жертва», трофическая функция, схема переменных направлений, аппроксимация, устойчивость.

Ищется решение $s, c, v \in C_1^{2,2}(G) \cap C_0^{1,1}(\bar{G})$, удовлетворяющее системе [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = rs \left(1 - \frac{s}{K}\right) - \frac{asc}{1+ahs} + \delta_s \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right), \\ \frac{\partial c}{\partial t} = e \frac{asc}{1+ahs} - mc - \frac{\partial(cv)}{\partial x} - \frac{\partial(cv)}{\partial y} + \delta_c \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\right) + \delta_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \end{cases} \quad (1)$$

соответствующим начальным

$$\begin{aligned} s(x, y, 0) &= g_1(x, y), \\ c(x, y, 0) &= g_2(x, y), \\ v(x, y, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{\Gamma} &= \frac{\partial s}{\partial y} \Big|_{\Gamma} = 0, \\ \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{\Gamma} &= \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{\Gamma} = 0, \\ v \Big|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где рассматриваемая область имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_t &= \bar{G} \times [0 \leq t \leq T], \\ \bar{G} &= G \cup \Gamma, \\ G &= \{(x, y) | 0 < x < L_1, 0 < y < L_2\}, \\ \Gamma &= \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} x = 0, 0 \leq y \leq L_2; x = L_1, 0 \leq y \leq L_2 \\ y = 0, 0 \leq x \leq L_1; y = L_2, 0 \leq x \leq L_1 \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Для численной реализации задачи (1) – (3) применяется численный метод, в котором используется неявная разностная схема переменных направлений (продольно-поперечная схема), предложенная Писменом, Рекфордом и Дугласом [2]. Суть этого метода состоит в том, что при переходе с одного временного слоя на следующий последовательно решаются одномерные задачи вдоль строк и столбцов соответственно. Такой способ вычислений осуществляется путем введения промежуточного временного слоя с шагом 0.5τ .

В \bar{G} построим равномерную по x, y сетку с шагами $h_1 = \frac{L_1}{N_1}$ и

$$h_2 = \frac{L_2}{N_2}.$$

Введем следующие обозначения:

$$s = s^n, \quad \bar{s} = s^{n+1/2}, \quad \hat{s} = s^{n+1},$$

$$c = c^n, \quad \bar{c} = c^{n+1/2}, \quad \hat{c} = c^{n+1},$$

$$v = v^n, \quad \bar{v} = v^{n+1/2}, \quad \hat{v} = v^{n+1}$$

и аппроксимируем задачу (1) – (3) неявной разностной схемой переменных направлений:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{\bar{s}_{i,j} - s_{i,j}}{0.5\tau} = \delta_s \left(\frac{\bar{s}_{i+1,j} - 2\bar{s}_{i,j} + \bar{s}_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{s_{i,j+1} - 2s_{i,j} + s_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
& + rs_{i,j} \left(1 - \frac{s_{i,j}}{K} \right) - \frac{as_{i,j}c_{i,j}}{1 + ahs_{i,j}}, \\
& \frac{\bar{c}_{i,j} - c_{i,j}}{0.5\tau} = \delta_c \left(\frac{\bar{c}_{i+1,j} - 2\bar{c}_{i,j} + \bar{c}_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{c_{i,j+1} - 2c_{i,j} + c_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
& + e \frac{as_{i,j}c_{i,j}}{1 + ahs_{i,j}} - mc_{i,j} - c_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_1} - v_{i,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_1} - \\
& - c_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_2} - v_{i,j} \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{h_2}, \\
& \frac{\bar{v}_{i,j} - v_{i,j}}{0.5\tau} = \delta_v \left(\frac{\bar{v}_{i+1,j} - 2\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
& + k \left(\frac{s_{i,j} - s_{i-1,j}}{h_1} + \frac{s_{i,j} - s_{i,j-1}}{h_2} \right);
\end{aligned} \right\} \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{\hat{s}_{i,j} - \bar{s}_{i,j}}{0.5\tau} = \delta_s \left(\frac{\bar{s}_{i+1,j} - 2\bar{s}_{i,j} + \bar{s}_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{\hat{s}_{i,j+1} - 2\hat{s}_{i,j} + \hat{s}_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
& + rs_{i,j} \left(1 - \frac{s_{i,j}}{K} \right) - \frac{as_{i,j}c_{i,j}}{1 + ahs_{i,j}}, \\
& \frac{\hat{c}_{i,j} - \bar{c}_{i,j}}{0.5\tau} = \delta_c \left(\frac{\bar{c}_{i+1,j} - 2\bar{c}_{i,j} + \bar{c}_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{\hat{c}_{i,j+1} - 2\hat{c}_{i,j} + \hat{c}_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
& + e \frac{as_{i,j}c_{i,j}}{1 + ahs_{i,j}} - mc_{i,j} - c_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_1} - v_{i,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_1} - \\
& - c_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_2} - v_{i,j} \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{h_2}, \\
& \frac{\hat{v}_{i,j} - \bar{v}_{i,j}}{0.5\tau} = \delta_v \left(\frac{\bar{v}_{i+1,j} - 2\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{\hat{v}_{i,j+1} - 2\hat{v}_{i,j} + \hat{v}_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
& + k \left(\frac{s_{i,j} - s_{i-1,j}}{h_1} + \frac{s_{i,j} - s_{i,j-1}}{h_2} \right).
\end{aligned} \right\} \quad (5)
\end{aligned}$$

К схемам (4), (5) добавляются начальные условия

$$\begin{aligned} s_{i,j}^0 &= g_1(x_i, y_j), \\ c_{i,j}^0 &= g_2(x_i, y_j), \\ v_{i,j}^0 &= 0, \\ i &= 0, \dots, N_1; \quad j = 0, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия для разностной схемы (4) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{0,j} &= \bar{\mu}1_{0,j}, \quad \bar{s}_{N_1,j} = \bar{\mu}1_{N_1,j}; \\ \bar{c}_{0,j} &= \bar{\mu}2_{0,j}, \quad \bar{c}_{N_1,j} = \bar{\mu}2_{N_1,j}; \\ \bar{v}_{0,j} &= 0, \quad \bar{v}_{N_1,j} = 0; \\ j &= 1, \dots, N_2 - 1, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\bar{\mu}1 = \frac{1}{2}(\hat{s} + s) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\hat{s} - s), \quad \bar{\mu}2 = \frac{1}{2}(\hat{c} + c) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\hat{c} - c). \quad (8)$$

Для системы (5) граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{i,0} &= \hat{s}_{i,1}, \quad \hat{s}_{i,N_2} = \hat{s}_{i,N_2-1}; \quad \hat{c}_{i,0} = \hat{c}_{i,1}, \quad \hat{c}_{i,N_2} = \hat{c}_{i,N_2-1}; \\ \hat{v}_{i,0} &= 0, \quad \hat{v}_{i,N_2} = 0; \quad i = 0, \dots, N_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости разностной схемы в целых шага эквивалентной схеме переменных направлений (4), (6), (7), (8) и (5), (6), (9) [2, 3].

Составлена программа на языке C++ для реализации разностной задачи (4) – (9). Рассматривается взаимодействие двух видов популяции. В роли жертв – зайцы, хищников – лисы, обитающие на территории Верхнекетского района Томской области. Площадь территории района составляет 29 043,16 км². Причем на указанной территории в 2017 году обитало 13 964 шт. зайцев и 1 973 шт. лис [4]. Изучается динамика этих видов на протяжении года.

Полученные результаты представлены в виде графиков на рис. 1 – рис. 6.

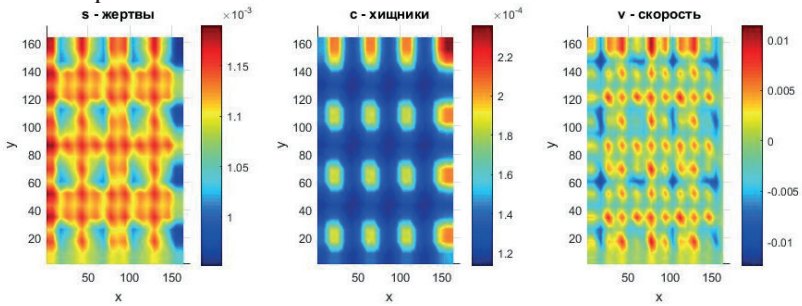


Рис. 1. Распределение плотности популяции жертв, хищников и скорости

при $t = 1 \text{ сут}$

На рисунке 1 представлены графики изменения плотности популяции жертв, хищников и скорости, определяющей поисковое поведение хищников за период $t = 1 \text{ сут}$. Следует отметить, что распределение популяции жертв по всей области происходит так, как указано на первом графике рисунка 1, причем на участках этого графика, отмеченных синим цветом, плотность популяции меньше, а хищников больше (график второй). Скорость (график третий) растет в тех направлениях, где образуется скопление жертв.

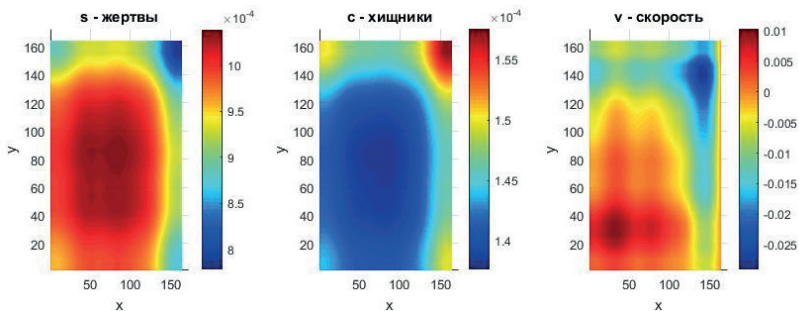


Рис. 2. Распределение плотности популяции жертв, хищников и скорости

при $t = 10 \text{ сут}$

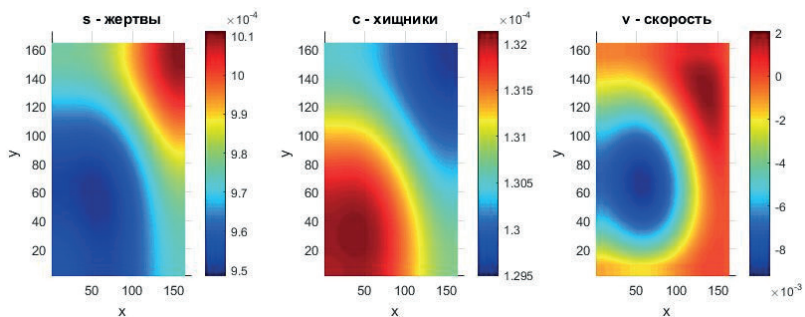


Рис. 3. Распределение плотности популяции жертв, хищников и скорости при $t = 60 \text{ сут}$

На рис. 2 – рис. 3 представлены аналогичные графики для моментов времени $t = 10 \text{ сут}$ и $t = 60 \text{ сут}$. К моменту $t = 10 \text{ сут}$ популяция жертв скапливается в центре ареала обитания, там где плотность скопления хищников меньше. Концентрация хищников наблюдается в верхней части и на правой границе ареала (рис. 2, график второй). В тех же участках ареала обитания (рис. 2, график первый) плотность популяции жертв уменьшается. График скорости показывает направление, где сосредоточена популяция жертв. На рис. 3 наблюдается картина противоположная той, что можно видеть на рис. 2.

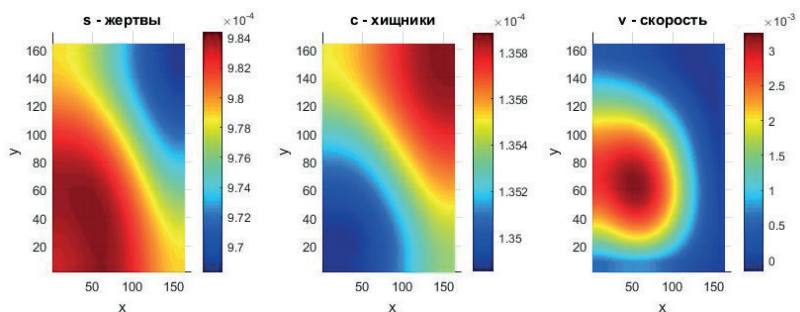


Рис. 4. Распределение плотности популяции жертв, хищников и скорости при $t = 105 \text{ сут}$

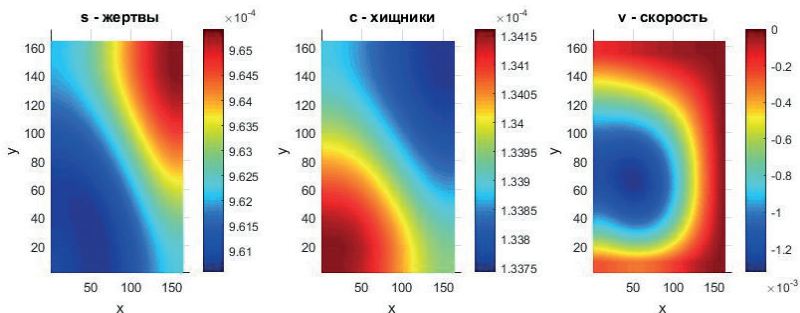


Рис. 5. Распределение плотности популяции жертв, хищников и скорости при $t = 150 \text{ сут}$

Аналогичная картина наблюдается на рис. 4 – рис. 5. К моменту $t = 150 \text{ сут}$ ареал обитания обеих популяций делится на две части диагональю, проходящей через левую верхнюю и правую нижнюю точки. Отметим, что жертвы сосредоточены в нижней части, а хищники в верхней части ареала, и скорость направлена в сторону сосредоточения жертв. К моменту времени $t = 150 \text{ сут}$ жертвы перемещаются из верхней части в нижнюю часть места обитания, где концентрация хищников меньше. Заметим, что $t = 150 \text{ сут}$ является временем, начиная с которого плотности обеих популяций приближаются к соответствующим постоянным значениям. Результаты численных расчетов сравнивались с данными наблюдений экологов в 2018 году [5]. Относительная погрешность оказалась равной 7%.

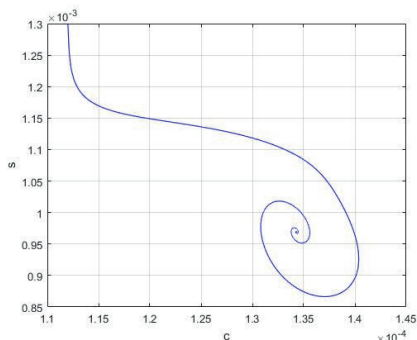


Рис. 6. График изменения s и c в фазовой плоскости в сечении $x = 86.21 \text{ км}$, $y = 94.831 \text{ км}$

На рис. 6 представлен график изменения плотности хищников s и жертв s с течением времени в сечении $x = 86.21$ км и $y = 94.831$ км. График демонстрирует устойчивость процессов, описываемых в рассматриваемой двумерной задаче. Фазовая траектория имеет вид закрученной спирали, которая с течением времени приближается к положению равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тютюнов В.Ю., Сапухина Н.Ю., Сенина И.Н., Ардита Р. Явная модель поискового поведения хищника // Журнал общей биологии. 2002. Т. 63, № 2. С.137–148.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М. : Физматлит, Наука, 1971.
3. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. Томск : Издательский Дом ТГУ, 2014.
4. Государственный доклад «О состоянии и охране окружающей среды Томской области в 2017 году» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.ogbu.green.tsu.ru/wp-content/uploads/2021/07/Госдоклад-2017.pdf>.
5. Государственный доклад «О состоянии и охране окружающей среды Томской области в 2018 году» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.ogbu.green.tsu.ru/wp-content/uploads/2021/07/Госдоклад-2018.pdf>.

Хамидов Абдулло Нуриллаевич, магистрант, ТГУ, abdullo_khamidov@mail.ru.

Михайлов Михаил Дмитриевич, старший преподаватель, ТГУ, michel@math.tsu.ru.

О фундаментальном решении не \mathbb{C} -линейного возмущения оператора Коши – Римана

Ю.А. Хорьякова

Красноярский математический центр, Красноярск

Аннотация. В данной работе построено двустороннее фундаментальное решение для одного \mathbb{R} -линейного, но не \mathbb{C} -линейного возмущения одномерного оператора Коши – Римана. Как следствие получена формула Грина для этого возмущения и представлен критерий разрешимости некорректной задачи Коши в пространствах Гельдера для такого возмущенного дифференциального оператора в терминах вещественно-аналитического продолжения потенциалов, участвующих в формуле Грина.

Ключевые слова: фундаментальное решение, формула Грина, некорректная задача Коши, оператор эллиптического типа.

Рассмотрим следующий оператор, являющийся возмущением оператора Коши – Римана: $\bar{\partial} + A$, где по определению для комплекснозначной функции оператор

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}, [1] \text{ где } A = \begin{pmatrix} \pm a & b \\ b & \pm a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что в случае, когда диагональные элементы b матрицы A равны нулю, матрица A будет действовать на U как комплексное сопряжение: $AU = \bar{U}$, тогда дифференциальный оператор $\bar{\partial} + A$ будет являться линейным над полем вещественных чисел и не являться линейным над полем комплексных чисел (он аддитивен, но не однороден).

Основной целью данной статьи является построение его фундаментального решения, формулы Грина, а также рассмотрения критерия разрешимости задачи Коши для данного оператора.

Для нахождения фундаментального решения оператора $\bar{\partial} + A$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма. При действии оператора $\bar{\partial} + A$ справа и слева на сопряженный ему оператор $(\bar{\partial} + A)^*$ получим оператор Гельмгольца:

$$(\bar{\partial} + A)(\bar{\partial} + A)^* U = (\bar{\partial} + A)^*(\bar{\partial} + A) U = -\frac{\Delta}{4} U + (a^2 + b^2) U.$$

Таким образом, исходя из этого, мы получаем следующую теорему.

Теорема. Для оператора $\bar{\partial} + A$ двустороннее фундаментальное решение имеет вид:

$$\Phi_A(\zeta, z) = (\bar{\partial} + A)^* \Phi(\zeta, z),$$

где

$$\Phi(\zeta, z) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|\zeta - z|),$$

– фундаментальное решение оператора Гельмгольца [3, § 23, п. 8].

Теорема. Пусть D ограниченная область с гладкой границей ∂D . Если $u: D \rightarrow \mathbb{C}$ функция класса $C^1(\underline{D})$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \Phi_A(\zeta, z) u(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \Phi_A(\zeta, z) (\bar{\partial} + A) f(\zeta) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \begin{cases} u(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar{D}, \end{cases}$$

где ориентация ∂D индуцирована естественной ориентацией \mathbb{C} .

Рассмотрим следующую задачу Коши.

Задача 1. По заданным F в области D и U_0 на S найти U

$$\begin{cases} \bar{\partial} U + AU = F \text{ в } D, \\ U|_S = U_0, \end{cases}$$

где S – часть гладкой границы ∂D ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$. Эта задача есть не \mathbb{C} -линейное возмущение классической задачи Коши для системы Коши – Римана, см. [4].

При ее решении мы воспользуемся методом, предложенным в работе Л.А. Айзенберга и А.М. Кытманова [5], позднее адаптированном к изучению некорректной задачи Коши для широкого класса эллиптических систем, см. [2] и [6]. Именно, построим к области D двойственную область D^+ с гладкой

границей ∂D^+ так, чтобы множество $D \cup S \cup D^+$ было односвязной областью. И тогда верен следующий критерий о разрешимости данной задачи.

Теорема. Пусть D ограниченная область с гладкой границей $\partial D \in C^2$. Пусть $u_0(z) \in C^{1,\lambda}(\bar{S}), f(z) \in C^{0,\lambda}(\bar{D})$. Тогда существует $u(z)$ решение задачи Коши (1) из $C^{1,\lambda}(D \cup S)$ тогда и только тогда, когда существует функция $F(z) \in C^{1,\lambda}(D \cup S \cup D^+)$, такая, что

$$(-\Delta + a^2 + b^2)F(z) = 0 \text{ в } D \cup S \cup D^+,$$

и

$$F(z) = \frac{i}{4} \int_S \Phi_A(\zeta, z) u_0(\zeta) d\zeta + \frac{i}{4} \int_D \Phi_A(\zeta, z) f(\zeta) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \text{ в } D^+,$$

причем

$$u(z) = \frac{i}{4} \int_S \Phi_A(\zeta, z) u_0(\zeta) d\zeta + \frac{i}{4} \int_D \Phi_A(\zeta, z) f(\zeta) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta - F(z) \text{ в } D.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ // Лань, 2004. 336 с.
2. Tarkhanov, N.N. *The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations* // Berlin: Akademie-Verlag, 1995. 478 pp.
3. Владимирова В.С. Уравнения математической физики // Москва: Наука, 1981. 512 с.
4. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения // Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1990. 248 с.
5. Айзенберг Л.А. О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы / Л.А. Айзенберг, А.М. Кытманов // Матем. сборник, 182 : 4. 1991, 490–507 с.
6. Shlapunov A.A. *Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols*/ A.A. Shlapunov, N.N/ Tarkhanov// Proc. London. Math. Soc. – 1995. V, 71, N. 1, pp. 1–54 pp.

Хорьякова Юлия Александровна Антоновна, ответственный исполнитель ВНК РНОМЦ «Красноярский математический центр», ykhoryakova@sfu-kras.ru.

* Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Разностные схемы высокого порядка аппроксимации для решения гиперболических уравнений

А.С. Чижова, В.И. Лаева

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

Аннотация. В работе рассматриваются явные разностные схемы второго и третьего порядка аппроксимации для решения гиперболических уравнений. Вычислительные алгоритмы получены с помощью различных подходов: разностные схемы MLU и MUSCL [1], основанные на построении полиномиальной TVD-реконструкции; трехслойная схема «кабаре» [2]; схема, полученная как линейная комбинация схемы «кабаре» и схемы с центральными разностями [3]; двухпараметрическая разностная схема с улучшенными дисперсионными свойствами [4]. Проведен сравнительный анализ рассмотренных разностных схем на решении задачи Коши для линейного уравнения переноса в случае гладких и разрывных начальных условий.

Ключевые слова: разностная схема, аппроксимация, устойчивость, монотонность, линейное уравнение переноса.

Важный класс решений, который допускают уравнения гиперболического типа, содержит разрывные функции. Поэтому для решения задач, где возникают области с большими градиентами исследуемых функций, необходимо построение разностных схем, обладающих высоким порядком аппроксимации, минимальной схемной диссипацией и дисперсией, монотонностью. При использовании устойчивых разностных схем первого порядка аппроксимации численное решение, как правило, «размывается» по пространству. Классические схемы повышенного порядка аппроксимации также могут приводить к качественным искажениям решения – вычислительным осцилляциям. Для уменьшения нефизических осцилляций в схему вводят или искусственную вязкость, или ограничители. Другой способ – построение нелинейных (гибридных) разностных схем, когда в различных точках расчетной сетки используют различные по свойствам схемы.

Многие типичные проблемы, возникающие при решении гиперболических уравнений, проявляются уже на простейшем

уравнении конвективного переноса с постоянной скоростью, поэтому оно используется для разработки и тестирования численных алгоритмов.

Рассмотрим смешанную задачу Коши для линейного уравнения переноса:

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const}, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \geq 0 \quad (2)$$

и граничным условием

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0, \quad u_0(0) = \mu(0). \quad (3)$$

Для численного решения поставленной задачи Коши (1) – (3) рассмотрены явные конечно-разностные схемы, устойчивые при числе Куранта $c = |a| \frac{\tau}{h} \leq 1$.

Явная схема с разностями против потока [5]:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} &= 0, \text{ если } a > 0, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} &= 0, \text{ если } a < 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Схема (4) имеет погрешность аппроксимации $O(\tau + h)$, обладает большой диссипацией и монотонна.

Явная трехслойная схема «кабаре» [2]:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\tau} + \frac{u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}}{2\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} &= 0, \text{ если } a > \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\tau} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1}}{2\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} &= 0, \text{ если } a < \end{aligned} \quad (5)$$

Схема «кабаре» обладает улучшенными по сравнению с классическими линейными схемами дисперсионными свойствами. Она устойчива при положительных числах Куранта, не превышающих единицу, и точна при числах Куранта 0,5 и 1. Схема (5) требует задания начальных условий на двух временных слоях, аппроксимирует уравнение (1) с порядком $O(\tau^2 + h^2)$.

Линейная комбинация «кабаре» (5) и схемы с центральными разностями [3]:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}}{2\tau} + a \frac{u_{j+1}^n + 4u_j^n - 5u_{j-1}^n}{4h} &= 0, \text{ если } a > 0; \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1}}{2\tau} + a \frac{5u_{j+1}^n + 4u_j^n - u_{j-1}^n}{4h} &= 0, \text{ если } a < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Схема (6), представленная как линейная комбинация, аппроксимирует линейное уравнение переноса с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$.

Двухпараметрическая разностная схема с улучшенными дисперсионными свойствами [4]:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{\bar{u}_{j+1/2}^n - \bar{u}_{j-1/2}^n}{h} = 0, \quad (7)$$

где

$$\bar{u}_{j+1/2}^n = \alpha \begin{pmatrix} u_{j-1}^n \\ u_{j+2}^n \end{pmatrix} + (1 - \alpha - \beta) \begin{pmatrix} u_j^n \\ u_{j+1}^n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_{j+1}^n \\ u_j^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \alpha &\geq 0, \\ \alpha &< 0. \end{aligned}$$

Как показано в работе [4], для получения схемы (7) третьего порядка точности $O(\tau^3 + h^3)$ необходимо, чтобы параметры α и β удовлетворяли уравнениям

$$2(\alpha - \beta) + 1 - c = 0, \quad c^2 - 1 - 6\alpha = 0.$$

Данные равенства выполняются при значениях

$$\alpha = \frac{c^2 - 1}{6}, \quad \beta = \alpha + \frac{1 - c}{2}, \quad c - \text{число Куранта.}$$

MUSCL (Monotonic Upstream centered Scheme for Conservation Laws) [1]:

$$\begin{aligned} &u_{j+1/2}^n \\ &= \begin{cases} u_j^n + 0.5 \max [0, \min \text{mod}(2\theta, (2 + \theta)/3, 2)](u_{j+1}^n - u_j^n), & a > 0, \\ u_{j+1}^n - 0.5 \max [0, \min \text{mod}(2\hat{\theta}, (2 + \hat{\theta})/3, 2)](u_{j+1}^n - u_j^n), & a \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n + \varepsilon * \text{sign}(u_{j+1}^n - u_j^n)}, \hat{\theta} \\ &= \frac{u_{j+2}^n - u_{j+1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n + \varepsilon * \text{sign}(u_{j+1}^n - u_j^n)}. \end{aligned}$$

MLU (Monotonic Linear Upstream) [5]:

$$u_{j+1/2}^n = \begin{cases} u_j^n + 0.5h \cdot P_{j+1/2}^n, & a > 0, \\ u_{j+1}^n - 0.5h \cdot P_{j+1/2}^n, & a \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{где } P_{j+1/2}^n = \min \text{ mod} \left[\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}, 2 \min \text{ mod} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}, \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right) \right].$$

Схемы (8) и (9), полученные на основе полиномиальной TVD-реконструкции (Total Variation Diminishing – невозрастание полной вариации), имеют порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Для проведения численного эксперимента рассматривались две задачи для линейного уравнения переноса.

Тестовая задача 1

Рассмотрим смешанную задачу Коши для линейного уравнения переноса с гладким начальным условием:

$$u_t + au_x = 0, (10)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \sin(x), 0 \leq x \leq X, (11)$$

и граничным условием

$$u(0, t) = \sin(-t), 0 \leq t \leq T, (12)$$

где x – пространственная переменная, t – время, $a = \text{const}$.

Точное решение задачи (10) – (12):

$$u(x, t) = \sin(x - t). (13)$$

Задача (10) – (12) решалась с помощью представленных выше разностных схем (4) – (9). Расчеты производились на равномерных сетках при следующих условиях: $a = 1$, количество узлов $M = 100$ и $M = 200$, шаг сетки $h = \frac{X}{M}$, $X = 2$, $T = 1$, число Куранта $c = 0,2$.

Для сравнения степени согласования расчетов с точным решением рассматривались нормы погрешности:

$$H_1 = \max_{j=0, \dots, M} |u_j^n - u(T, u_j)|, \quad H_2 = \sqrt{\sum_{i=0, \dots, M} |u_j^n - u(T, u_j)|^2 / M}, (14)$$

значения которых для рассматриваемой тестовой задачи представлены в таблице 1.

Таблица 1

Сравнение норм погрешности различных методов для тестовой задачи 1

Метод	M = 100		M = 200	
	H_1	H_2	H_1	H_2
Противопотоковая (4)	0,0066	0,0030	0,0033	0,0015
MLU (9)	0,0020	0,0009	0,0013	0,0005
MUSCL (8)	0,0022	0,0008	0,0002	0,00048
3-слойная «кабаре» (5)	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$
Линейная комбинация (6)	0,0007	0,0003	0,0003	0,0001
Двухпараметрическая схема (7)	0,0008	0,0005	0,0004	0,0002

Как видно из таблицы, численные решения, полученные по схемам (4) – (9) для задачи (10) – (12), хорошо совпадают с аналитическим решением (13). Наиболее точный результат дает трехслойная схема «кабаре».

Тестовая задача 2

Рассмотрим задачу распространения прямоугольного импульса, находящегося в начальный момент времени на отрезке $[0,25; 0,75]$:

$$u_t + u_x = 0, \quad (15)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \in [0,25; 0,75], \\ 0, & x \notin [0,25; 0,75], \end{cases} \quad (16)$$

с граничным условием

$$u(0, t) = 0. \quad (17)$$

Аналитическое решение задачи (15) – (17):

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x - t \in [0,25; 0,75], \\ 0, & x - t \notin [0,25; 0,75]. \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотренная задача (15) – (17) решалась с помощью представленных выше разностных схем (4) – (9). Для сравнения степени согласования расчетов с точным решением рассматривались нормы погрешности (14), значения которых для задачи 2 представлены в таблице 2. Расчеты проводились при тех же значениях M, h, T и числе Куранта c , как в задаче 1.

Наименьшие погрешности дают схемы MUSCL и MLU. Двухпараметрическая схема (7) и противопотоковая (4) показывают почти одинаковые максимальные отклонения (норма

H_1), но среднеквадратичное отклонение (H_2) у схемы (7) в 2 раза меньше, чем у схемы (4). Трехслойные схемы (5) и (6) дают самую большую погрешность по норме H_1 , но значение норм H_2 у схем (5), (6) немного меньше, чем у схемы (4).

На рисунках 1–3 представлены графики зависимости аналитического решения (сплошная линия) тестовой задачи 2 и численных расчетов в момент времени $T = 1$ на сетке с количеством узлов $M = 100$.

На рисунке 1 крестиками показано численное решение, полученное противопотоковой схемой (4), а треугольники – схемой MLU.

Таблица 2

Сравнение норм погрешности различных методов для тестовой задачи 2

Метод	M = 100		M = 200	
	H_1	H_2	H_1	H_2
Противопотоковая (4)	0,4749	0,1730	0,4822	0,1445
MLU (9)	0,2857	0,0534	0,2857	0,0378
MUSCL (8)	0,2769	0,0524	0,2769	0,0371
3-слойная «кабаре» (5)	0,6097	0,1222	0,7254	0,1125
Линейная комбинация (6)	0,7029	0,1467	0,8174	0,1681
Двухпараметрическая схема (7)	0,4492	0,0923	0,5426	0,0771

Из рисунка 1 видно, что противопотоковая схема (4) дает сильно сглаженное решение, а решение, полученное по схеме MLU, хорошо соответствует точному решению (18).

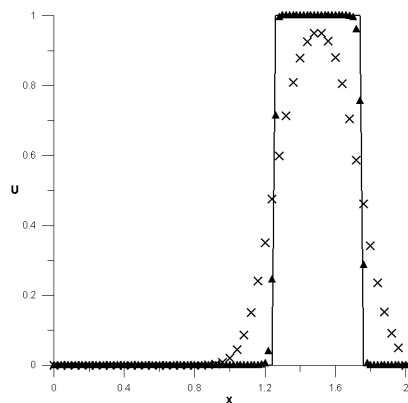


Рис. 1. Решения тестовой задачи 2 на основе противопотоковой схемы (крестики); схемы MLU (треугольники). Сплошная линия – аналитическое решение

На рисунках 2а и 2б показаны расчеты, полученные по схеме «кабаре» (5) и схеме (6) соответственно. Обе эти схемы дают сильные осцилляции решения в области больших градиентов.

Численное решение двухпараметрической разностной схемы с улучшенными дисперсионными свойствами (9) представлено на рисунке 3. Из рисунка видно, схема дает небольшие осцилляции, но в целом достаточно хорошо повторяет профиль точного решения (18).

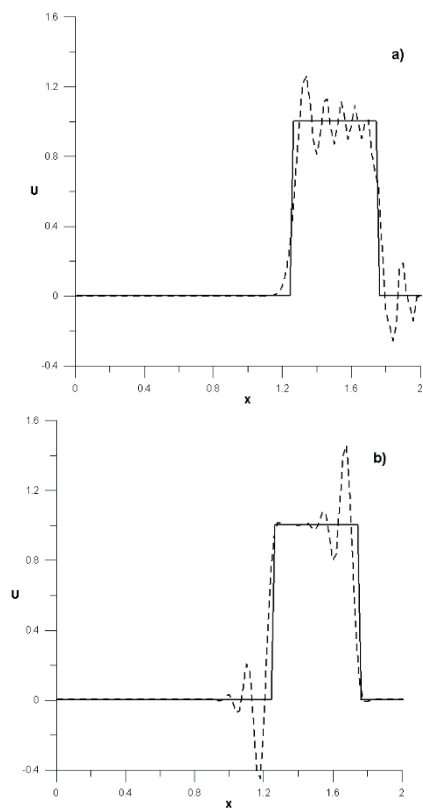


Рис. 2. Решение тестовой задачи 2 на основе схемы «кабаре» (2a) и линейной комбинации схемы «кабаре» и схемы с центральными разностями (2b). Сплошная линия – аналитическое решение, пунктирная линия – численное решение

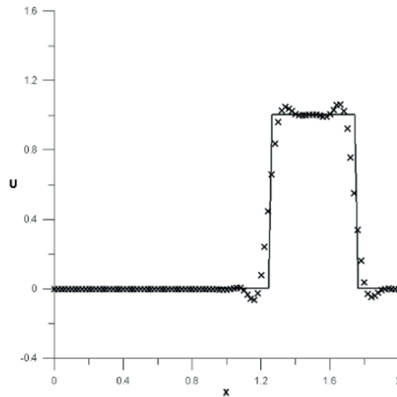


Рис. 3. Решение тестовой задачи 2 на основе двухпараметрической разностной схемы с улучшенными дисперсионными свойствами. Сплошная линия – аналитическое решение, крестиками обозначено численное решение

Таким образом, из графиков 1–3 и по результатам таблицы 2 можно сделать вывод: при решении задачи 2 наилучший результат дают схемы MLU и MUSCL, двухпараметрическая схема (7) уступает по нормам погрешности TVD-схемам, схема «кабаре» и линейная комбинация (6) дают осциллирующие решения и наибольшие погрешности среди рассмотренных схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Van Leer B. *Toward the ultimate conservative difference scheme V. A Second order sequel to Godunov's method* // *J. Comput. Phys.* 1979. V.32. P.101–136.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А. *Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной* // *Матем. моделирование.* 1998. Т. 10, № 1. С. 86–100.
3. О.М. Белоцерковский, В.А. Гуцин, В.Н. Коньшин. *Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью* // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1987, т. 27, № 4, с. 594–609.
4. А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, *Разностная схема КАБАРЕ с улучшенными дисперсионными свойствами*, *Матем. моделирование*, 2019. Т. 31, № 3. С. 83–96.

5. *Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // J. Comp. Phys. 1974. V. 14. P. 361–370.*

Чижова Анна Сергеевна, студентка ММФ ТГУ, chizhova_anna@icloud.com.

Лаева Валентина Ивановна, старший преподаватель ММФ ТГУ, lvi@math.tsu.ru.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Все грани математики и механики:
сборник статей Всероссийской молодежной
научной конференции
(Томск, 23–27 мая 2022 г.)

Компьютерная верстка Кузнецов А.Б.
Редактор Вершинина А.П.

Подписано в печать 22.11.2022 г.
Формат издания 69х90/16
Печать цифровая. Гарнитура Times New Roman
Номер заказа № 31 838
Усл.п.л. 11.7 Уч-изд.л. 13.15
Тираж 100 экз.

Отпечатано в ООО «Томский Полиграфический Комплекс»